Projektive Kurven, Riemannsche Flächen und Funktionenkörper

Bachelorarbeit

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen

vorgelegt von
Florian Kranhold

betreut von
Prof. Jürgen Hausen

Tübingen, der 28. Juli 2015

PROJEKTIVE KURVEN, RIEMANNSCHE FLÄCHEN UND FUNKTIONENKÖRPER

FLORIAN KRANHOLD
Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Einleitung

Projektive Varietäten sind bis auf Isomorphie abgeschlossene Teilmengen des projektiven Raumes, der mit einer algebraisch motivierten Topologie und Strukturgabe versehen wurde. Weist man ihnen einen Funktionenkörper zu, so stellt man fest, dass man sich auf offene Teilmengen zurückziehen kann und gelangt so zum Konzept der birationalen Äquivalenz zwischen quasiprojektiven Varietäten. Hier erhalten wir einen ersten Äquivalenzsatz. Anschließend betrachten wir Kurven, d. h. zariski-topologisch eindimensionale Varietäten, und versuchen, den bisher analytisch motivierten Begriff der Regularität algebraisch durch Bewertungsringe zu beschreiben. Erstaunlich ist, dass im Falle projektiver nichtsingulärer Kurven birationale Äquivalenz gleichbedeutend mit echter Isomorphie ist, sodass unter bestimmten Voraussetzungen die obige Kategorienäquivalenz um eine viel speziellere dritte Kategorie erweitert werden kann.

Riemannsche Flächen auf der anderen Seite sind reell-zweidimensionale zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten mit der Zusatzeigenschaft, dass ihre Kartenwechsel biholomorph sind. Zusammen mit einer geeigneten Garbe und einem dadurch kanonisch gegebenen Morphismenbegriff werden die kompakten Riemannschen Flächen zusammen mit den nichtkonstanten Morphismen zu einer Kategorie. Hierbei steht vor allem ein neuer Funktionenkörper, nämlich der der meromorphen Funktionen, d. h. der Morphismen von einer kompakten Riemannschen Fläche auf die Riemannsche Sphäre, im Vordergrund. Durch einige topologische Betrachtungen bekommt man hierdurch ein Äquivalent zum algebraischen Abbildungsgrad definiert.

In vierten Abschnitt wollen wir schließlich die Kategorie der Riemannschen Flächen mit der der projektiven Kurven zusammenbringen. Dazu werden wir zunächst den Transzendenzgrad des Körpers der meromorphen Funktionen kontrollieren, was in großen Teilen ohne den Satz von Riemann-Roch gelingt. Wieder mithilfe einiger topologischer Überlegungen stellen wir fest, dass der Körper endlich erzeugt ist. Mithilfe des Satzes vom primitiven Element erhalten wir zwei ausgezeichnete meromorphe Funktionen, die uns schließlich den abschließenden Nachweis der wesentlichen Surjektivität und der Volltreue unseres letzten Funktors ermöglichen.

Abschließend wird der Zusammenhang am Beispiel komplexer Tori und elliptischer Kurven veranschaulicht, wobei zu diesem Zwecke die Weierstraßsche $\wp$-Funktion mit Mitteln der Funktionentheorie untersucht wird.

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen

1.1. Grundbegriffe und Kategorientheorie.

Definition 1.1.1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für zwei $\mathbb{K}$-Algebren $\mathbb{K} \subseteq A, A'$ (oder Körpererweiterungen im Speziellen) sei

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, A') := \{\varphi\colon A \to A' \text{ Homomorphismus; } \varphi\restriction_{\mathbb{K}} = \mathrm{id}\}$$

die Menge der $\mathbb{K}$-*Algebrenhomomorphismen*. Eine Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ heißt ferner n-*Erweiterung*, falls $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ endlich erzeugt ist und $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) = n$ gilt.

Definition 1.1.2. Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zwei Kategorien.

(i) $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ heißen *äquivalent* bzw. *antiäquivalent*, falls es einen kovarianten bzw. kontravarianten wesentlich surjektiven volltreuen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ oder $\mathcal{G}\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ gibt.

(ii) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}'\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ zwei Funktoren. Eine Vorschrift τ, die jedem Objekt X aus $\mathfrak{C}$ einen Morphismus $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}'(X)) \ni \tau_X\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}'(X)$ zuordnet, heißt *natürliche Transformation* zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$, falls für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{F}'(Y) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\tau_X"] & \mathcal{F}'(X) \end{tikzcd}$$

kommutativ wird. Falls für alle Objekte X die Abbildung τ_X ein Isomorphismus ist, so heißt τ *natürlicher Isomorphismus.*

(iii) Zwei Funktoren $\mathcal{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ und $\mathcal{G}\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ heißen *wesentlich invers*, falls es natürliche Isomorphismen $\tau^{\mathfrak{C}}$ zwischen $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ und $\mathrm{id}_{\mathfrak{C}}$ sowie $\tau^{\mathfrak{D}}$ zwischen $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ und $\mathrm{id}_{\mathfrak{D}}$ gibt.

Proposition 1.1.3. *Für Kategorien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind äquivalent bzw. antiäquivalent.*
(ii) *Es gibt wesentlich inverse Funktoren $\mathcal{F}\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ und $\mathcal{G}\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$.*

Insb. ist „als Kategorie äquivalent sein“ eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Siehe (Har07, S. 3). □

Erinnerung 1.1.4.

(i) Ein topologischer Raum (X, Ω) zusammen mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ heißt *Raum mit* $\mathbb{K}$-*Funktionen*, notiere $(X, \mathcal{O}_X)$, falls alle $\mathcal{O}_X(U)$ $\mathbb{K}$-Algebren von $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen $f\colon U \to \mathbb{K}$ mit punktweisen Verknüpfungen sind.

(ii) Eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ zwischen Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $\mathbb{K}$-Funktionen heißt *Morphismus*, falls für alle $V \subseteq Y$ offen und $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ auch $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$ gilt.

(iii) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit $\mathbb{K}$-Funktionen und $X' \subseteq X$ so ist X' zusammen mit der Teilraumtopologie und der induzierten Strukturgarbe wieder ein Raum mit $\mathbb{K}$-Funktionen.

(iv) Ist $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von Räumen mit $\mathbb{K}$-Funktionen und $f(X) \subseteq Y' \subseteq Y$, so ist $\varphi\colon X \to Y'$ ebenfalls ein Morphismus von Räumen mit $\mathbb{K}$-Funktionen.

1.2. Etwas Topologie.

Definition 1.2.1. Sei (X, Ω) ein topologischer Raum.

(i) (X, Ω) genüge dem *zweiten Abzählbarkeitsaxiom*, falls er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

(ii) (X, Ω) heißt *quasikompakt*, falls jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{i_j}\}_{j=1}^r$ besitzt, und *kompakt*, wenn X zusätzlich hausdorffsch ist.

(iii) (X, Ω) heißt *lokalkompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

(iv) (X, Ω) heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

Erinnerung 1.2.2.

(i) Sowohl die Hausdorff-Eigenschaft als auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom übertragen sich auf Teilraumtopologien.

(ii) Jeder metrische Raum (X, d) zusammen mit der Boreltopologie Ω_d ist hausdorffsch.

(iii) $\mathbb{R}^n$ sowie $\mathbb{C}^n$ zusammen mit der zugehörigen Boreltopologie erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(iv) Abgeschlossene Teilmengen (quasi-)kompakter Räume sind zusammen mit der Teilraumtopologie ebenfalls (quasi-)kompakt.

Definition 1.2.3. Ein Hausdorff-Raum (X, Ω_X) heißt *lokal homöomorph* zu einem topologischen Raum (Y, Ω_Y), falls es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ um x sowie $V \subseteq Y$ offen gibt so, dass ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to V$ existiert.

Konstruktion 1.2.4 (Quotiententopologie)**.** Sei (X, Ω_X) ein topologischer Raum, Y eine Menge und $\pi\colon X \to Y$ surjektiv. Dann ist

$$\Omega_Y \coloneqq \{V \subseteq Y;\, \pi^{-1}(V) \in \Omega_X\}$$

eine Topologie auf Y, die sog. *Quotiententopologie*.

Konstruktion 1.2.5 (Alexandroff-Kompaktifizierung)**.** Sei (X, Ω_X) ein topologischer Raum, p ein Objekt, das nicht in X liegt, und sei $Y \coloneqq X \mathbin{\dot\cup} \{p\}$. Dann ist

$$\Omega_Y \coloneqq \Omega_X \mathbin{\dot\cup} \big\{\{p\} \mathbin{\dot\cup} (X \setminus C);\, C \subseteq X \text{ quasikompakt und abgeschlossen}\big\}$$

eine Topologie auf Y, die sogenannte *Alexandroff-Kompaktifizierung* von Ω_X bzgl. p.

Konstruktion 1.2.6 (Kofinite Topologie)**.** Sei X eine unendliche Menge. Dann ist

$$\Omega \coloneqq \{U \subseteq X;\, X \setminus U \text{ ist endlich}\} \mathbin{\dot\cup} \{\emptyset\}$$

eine Topologie auf X, die sogenannte *kofinite Topologie*.

Erinnerung 1.2.7. Sei (X, Ω) ein topologischer Raum.

(i) Sei Y eine Menge und $\pi\colon X \to Y$ surjektiv, so ist die Quotiententopologie bzgl. π auf Y die feinste Topologie so, dass π stetig ist.

(ii) Das zweite Abzählbarkeitsaxiom wird auf Quotiententopologie und Alexandroff-Kompaktifizierung bzgl. p übertragen.

(iii) Die Alexandroff-Kompaktifizierung von $X \mathbin{\dot\cup} \{p\}$ ist quasikompakt.

1.3. **Überlagerungsabbildungen und Blätterzahl**[1].

Definition 1.3.1. Seien X und Y Hausdorff-Räume und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(i) φ heißt *diskret*, falls alle Fasern diskret sind.
(ii) φ heißt *offen*, wenn für alle $U \subseteq X$ offen $\varphi(U) \subseteq Y$ offen ist.
(iii) φ heißt *abgeschlossen*, wenn für alle $A \subseteq X$ abgeschlossen $\varphi(A) \subseteq Y$ abgeschlossen ist.
(iv) φ heißt *Überlagerung*, falls φ stetig, offen und diskret ist.
(v) φ stetig heißt *eigentlich*, wenn $\varphi^{-1}(C) \subseteq X$ kompakt für alle $C \subseteq Y$ kompakt ist.

[1] Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (For77, Kap. I.4, S. 18ff.)

Definition 1.3.2. Seien X und Y Hausdorff-Räume und $\varphi\colon X \to Y$ eine Überlagerung.

(i) $x \in X$ heißt *Verzweigungspunkt* von φ, falls für alle offenen Umgebungen $U \subseteq X$ von x die Einschränkung $\varphi\restriction_U$ nicht injektiv ist. Für einen Verzweigungspunkt x nenne $\varphi(x)$ *kritischen Punkt*. Sei $X_\varphi \subseteq X$ die Menge aller Verzweigungs- und $Y_\varphi \subseteq Y$ die Menge aller kritischen Punkte.

(ii) φ heißt *unverzweigt*, wenn es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ gibt so, dass $\varphi\restriction_U$ injektiv ist, d. h. wenn $X_\varphi = \emptyset$.

(iii) φ heißt *unbegrenzt*, wenn es für alle $y \in Y$ eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ sowie eine paarweise disjunkte Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ gibt so, dass

$$\varphi^{-1}(V) = \dot{\bigcup_{i\in I}} U_i$$

und $\varphi\restriction_{U_i}\colon U_i \to V$ Homöomorphismen sind.

(iv) Sei Z ein weiterer topologischer Raum und $\gamma\colon Z \to Y$ stetig. Eine stetige Abbildung $\hat\gamma\colon Z \to X$ heißt *Liftung* von γ bzgl. φ, falls $\gamma = \varphi \circ \hat\gamma$ gilt, d. h. wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ & Z. \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[ul, "\hat\gamma"] \end{tikzcd}$$

(v) φ besitze die *Kurvenliftungseigenschaft*, wenn es für jeden Weg $\gamma\colon [0,1] \to Y$ und für jedes $x_0 \in X$ mit $\gamma(0) = \varphi(x_0)$ eine Liftung $\hat\gamma\colon [0,1] \to X$ gibt mit $\hat\gamma(0) = x_0$.

Bemerkung 1.3.3.

(i) Für X und Y lokalkompakt ist jede eigentliche Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ abgeschlossen.
(ii) Für X kompakt und Y lokalkompakt ist jede stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ abgeschlossen.
(iii) Ist X kompakt, so ist jede stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ eigentlich.

Proposition 1.3.4. *Seien X und Y Hausdorff-Räume und $\varphi\colon X \to Y$ eine unbegrenzte Überlagerung, Z zusammenhängend und $\gamma\colon Z \to Y$ stetig. Dann sind zwei Liftungen $\hat\gamma_1, \hat\gamma_2\colon Z \to X$ identisch, wenn sie in einem Punkt $z_0 \in Z$ übereinstimmen.*

Beweis. (nach (For77, Satz I.4.8, S. 20f.)) Betrachte $M := \{z \in Z;\ \hat\gamma_1(z) = \hat\gamma_2(z)\}$. Dann ist $M \subseteq Z$ abgeschlossen, denn für die abgeschlossene Diagonale[2] $\Delta_X := \{(x,x);\ x \in X\} \subseteq X \times X$ gilt $M = (\hat\gamma_1, \hat\gamma_2)^{-1}(\Delta_X)$.

Da $M \neq \emptyset$, genügt es wegen des Zusammenhangs auf Z, zu zeigen, dass $M \subseteq Z$ offen ist. Sei $z \in M$ sowie $x := \hat\gamma_1(z) = \hat\gamma_2(z)$. Da φ unbegrenzt ist, gibt es offene Umgebung $U \subseteq X$ bzw. $V \subseteq Y$ um x bzw. y so, dass $\varphi\restriction_U\colon U \to V$ ein Homöomorphismus ist. Weiter gilt $\varphi(x) = \gamma(z)$. Da $\hat\gamma_1$ und $\hat\gamma_2$ stetig sind, gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq Z$ von z mit $\hat\gamma_i(W) \subseteq U$ für beide $i \in \{1,2\}$. Betrachte $\psi := (\varphi\restriction_U)^{-1} : V \to U$. Da $\varphi \circ \hat\gamma_i = \gamma$ gilt, folgt nun

$$\hat\gamma_i\restriction_W = (\psi \circ \gamma)\restriction_W,$$

also $\hat\gamma_1\restriction_W = \hat\gamma_2\restriction_W$ und insgesamt ist M offen, sodass die Behauptung folgt. □

Proposition 1.3.5. *Seien X und Y Hausdorff-Räume. Dann gilt:*

(i) *Jede unbegrenzte Überlagerung $\varphi\colon X \to Y$ unverzweigt.*
(ii) *Jede unbegrenzte Überlagerung $\varphi\colon X \to Y$ besitzt die Kurvenliftungseigenschaft.*
(iii) *Sind X und Y lokalkompakt, so ist jede unverzweigte Überlagerung $\varphi\colon X \to Y$ unbegrenzt.*

[2] Dies gilt, da $X \times X$ die Produkttopologie eines Hausdorff-Raumes trägt.

Beweis. (nach (For77, Satz I.4.14, S. 24)) Aussage „(i)“ ist trivial, denn alle $\varphi \restriction_{U_i}$ sind injektiv.

Zu „(ii)“: Sei $\gamma\colon [0,1] \to Y$ eine Kurve und $x_0 \in X$ mit $\gamma(0) = \varphi(x_0)$. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es eine Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_N = 1$ und offene Mengen $V_1, \ldots, V_N \subseteq Y$ mit

$$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq V_i \quad \text{und} \quad f^{-1}(V_i) = \dot{\bigcup_{j \in J_i}} U_{ij}$$

und $\varphi_{ij} := \varphi \restriction_{U_{ij}} \colon U_{ij} \to V_i$ sind Homöomorphismen.

Zeige nun die Existenz von Liftungen $\hat{\gamma}_k\colon [0, t_k] \to X$ für $k \in \{0, \ldots, N\}$ per Induktion nach k. Hierbei ist „$k = 0$“ trivial. Zu „$k-1 \to k$“: Es existiere also $\hat{\gamma}_{k-1}\colon [0, t_{k-1}] \to X$ mit $\hat{\gamma}_{k-1}(0) = x_0$. Setze $x_{k-1} := \hat{\gamma}_{k-1}(t_{k-1})$. Dann gilt $\varphi(x_{k-1}) = \gamma(t_{k-1}) \in V_k$ und wir finden ein $j \in J_k$ so, dass $x_{k-1} \in U_{kj}$. Betrachte nun $\psi := \varphi_{jk}^{-1}\colon V_k \to U_{kj}$ sowie

$$\hat{\gamma}_k\colon [0, t_k] \to X, t \mapsto \begin{cases} \hat{\gamma}_{k-1}(t) & \text{für } t \leq t_{k-1}, \\ \psi(\gamma(t)) & \text{für } t > t_{k-1}. \end{cases}$$

Dann ist $\hat{\gamma}_k$ die für den Induktionsschritt gewünschte stetige Fortsetzung.

Für „(iii)“ siehe (For77, Satz I.4.22, S. 27). □

Konstruktion 1.3.6 (Blätterzahl)**.** Seien X und Y Hausdorff-Räume, Y wegzusammenhängend, $f\colon X \to Y$ eine unbegrenzte Überlagerung sowie $y, y' \in Y$. Dann gilt $\#\varphi^{-1}(y) = \#\varphi^{-1}(y')$. Definiere dann $n := \#\varphi^{-1}(y)$ für $y \in Y$ beliebig als *Blätterzahl* von φ und nenne φ *n-blättrige Überlagerung.*

Beweis. (nach (For77, Satz I.4.25, S. 28)) Seien $y, y' \in Y$. Da Y wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to Y$ mit $\gamma(0) = y$ und $\gamma(1) = y'$. Wähle nun $x \in \varphi^{-1}(y)$. Da φ mit Proposition 1.3.5 (ii) die Kurvenliftungseigenschaft besitzt, gibt es mit Proposition 1.3.4 genau eine Liftung $\hat{\gamma}_x\colon [0,1] \to X$ mit $\hat{\gamma}_x(0) = x$. Betrachte jetzt

$$\Phi\colon \varphi^{-1}(y) \to \varphi^{-1}(y'), x \mapsto \hat{\gamma}_x(1)$$

Dann ist Φ offensichtlich bijektiv, sodass die Behauptung folgt. □

2. Projektive Kurven

2.1. Prävarietäten und der projektive Raum[3].

Vereinbarung 2.1.1. Im Folgenden ist $\mathbb{K}$ stets algebraisch abgeschlossen.

Erinnerung 2.1.2. Ein irreduzibler[4]Raum mit $\mathbb{K}$-Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *Prävarietät*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^r$ von affinen Varietäten gibt. Für zwei Prävarietäten $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt eine Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ *Morphismus* von Prävarietäten, falls φ ein Morphismus der zugrundeliegenden Räume mit $\mathbb{K}$-Funktionen ist. Bezeichne mit $\mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ die Menge der Morphismen.

Erinnerung 2.1.3. Betrachte $W_n := \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0_{n+1}\}$ sowie die Gruppenoperation

$$\mu\colon \mathbb{K}^* \times W_n \to W_n, (a, x) \mapsto a \cdot x.$$

Dann setze $\mathbb{P}_n := W_n/\mathbb{K}^*$, bezeichne $[z_0, \ldots, z_n] := [(z_0, \ldots, z_n)]$ und betrachte den kanonischen Projektionsepimorphismus $\pi_n\colon W_n \to \mathbb{P}_n, z \mapsto [z]$.

(i) Betrachte auf W_n die Zariski-Teilraumtopologie des $\mathbb{K}^{n+1}$ und verwende auf $\mathbb{P}_n$ die Quotiententopologie bzgl. π_n. Diese nennen wir *Zariski-Topologie.*

[3]Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (Hau15, Kap. 1 & Kap. 5) und (Har77, Kap. I.3, S. 14ff.)

[4]Hier weiche ich von der Vorlesung ab, denn in der gesamten Bachelorarbeit werden nur zariski-irreduzible Räume benötigt.

(ii) Sei $U \subseteq \mathbb{P}_n$ offen. Dann ist durch

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(U) := \{f \colon U \to \mathbb{K};\ f \circ \pi_n \in \mathcal{O}_{W_n}(\pi_n^{-1}(U))\}$$

eine Strukturgarbe auf $\mathbb{P}_n$ definiert, die sog. *Garbe der regulären Funktionen.* Auf diese Weise wird $\mathbb{P}_n$ zu einem Raum mit $\mathbb{K}$-Funktionen.

(iii) π_n ist ein Morphismus von Räumen mit $\mathbb{K}$-Funktionen und zusätzlich offen.

Definition 2.1.4 (Nullstellengebilde & Verschwindungsideal)**.**

(i) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ abgeschlossen heißt $C(X) := \overline{\pi_n^{-1}(X)} = \pi_n^{-1}(X) \,\dot{\cup}\, \{0\}$ *affiner Kegel.*
(ii) Für $\mathfrak{a} \leq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ homogen heißt $V_{\mathbb{P}_n}(\mathfrak{a}) := \pi_n(V_{\mathbb{K}^{n+1}}(\mathfrak{a}) \cap W_n)$ *Nullstellengebilde.*
(iii) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ heißt $I_{\mathbb{P}_n}(X) := I_{\mathbb{K}^{n+1}}(C(X))$ *Verschwindungsideal.*

Erinnerung 2.1.5 (Hilberts Nullstellensatz)**.** Wir haben inklusionsumkehrende Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \{X \subseteq \mathbb{P}_n \text{ abgeschlossen}\} & \longleftrightarrow & \{\mathfrak{a} \lneq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n] \text{ homogenes Radikalideal}\} \\ X & \mapsto & I_{\mathbb{P}_n}(X) \\ V_{\mathbb{P}_n}(\mathfrak{a}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{a} \end{array}$$

sowie $\{X \subseteq \mathbb{P}_n$ irreduzibel und abgeschlossen$\} \longleftrightarrow \{\mathfrak{a} \leq \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ homogen und prim$\}$.

Konstruktion 2.1.6 (Homogenisierung und Dehomogenisierung)**.** Sei $0 \leq i \leq n$.

(i) Für $f \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ homogen ist die *i-te Dehomogenisierung* ist gegeben durch

$$f_{(i)} := f(T_0, \ldots, T_{i-1}, 1, T_{i+1}, \ldots, T_n).$$

(ii) Für $g \in \mathbb{K}[T_j;\ 0 \leq j \leq n$ und $j \neq i]$ ist ist die *i-te Homogenisierung* gegeben durch

$$g^{(i)} := T_i^{\operatorname{tdeg}(g)} \cdot g(T_0 T_i^{-1}, \ldots, T_{i-1} T_i^{-1}, T_{i+1} T_i^{-1}, \ldots, T_n T_i^{-1}).$$

Definition 2.1.7 (Affine Karten)**.**

(i) Betrachte die offene Überdeckung $\{\mathbb{P}_n^i\}_{i=0}^n$ von $\mathbb{P}_n$, wobei $\mathbb{P}_n^i := \mathbb{P}_n \setminus V(T_i)$. Dann nenne

$$\mathfrak{A}_i \colon \mathbb{P}_n^i \to \mathbb{K}^n, [z_0, \ldots, z_n] \mapsto \left(z_0 z_i^{-1}, \ldots, z_{i-1} z_i^{-1}, z_{i+1} z_i^{-1}, \ldots, z_n z_i^{-1}\right)$$

i-te affine Überdeckungsabbildung.

(ii) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ (lokal) abgeschlossen definiere $X^i := X \cap \mathbb{P}_n^i \subseteq X$ sowie $X_i := \mathfrak{A}_i(X^i) \subseteq \mathbb{K}^n$. Ferner nenne $\mathfrak{A}_i^X := \mathfrak{A}_i\restriction_{X^i} \colon X^i \to X_i$ *i-te (quasi-)affine Karte* von X und die $X_0, \ldots, X_n$ *(quasi-)affine Komponenten* von X.

Erinnerung 2.1.8. Die affinen Überdeckungsabbildungen leisten folgendes:

(i) Für $0 \leq i \leq n$ ist $\mathfrak{A}_i$ ein Isomorphismus von affinen Varietäten mit Umkehrabbildung

$$\mathfrak{A}_i^{-1} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{P}_n^i, (z_0, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n) \mapsto [z_0, \ldots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n].$$

(ii) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ abgeschlossen ist $X_i \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraisch und $\mathfrak{A}_i^X \colon X^i \to X_i$ ein Isomorphismus affiner Varietäten.

(iii) Für $f \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_n]$ homogen sowie $g \in \mathbb{K}[T_0, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1}, \ldots, T_n]$ gilt

$$V_{\mathbb{P}_n}(f)_i \cong \mathfrak{A}_i\left(V_{\mathbb{P}_n}(f)_i\right) = V_{\mathbb{K}^n}(f_{(i)}) \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{A}_i^{-1}\left(V_{\mathbb{K}^n}(g)\right)} = V_{\mathbb{P}_n}\left(g^{(i)}\right).$$

Definition 2.1.9. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät über $\mathbb{K}$.

(i) Wenn es $Y \subseteq \mathbb{P}_n$ abgeschlossen gibt mit $X \cong Y$, so heißt X *projektive Varietät.*
(ii) Wenn es $Y \subseteq \mathbb{P}_n$ lokal abgeschlossen gibt mit $X \cong Y$, so heißt X *quasiprojektive Varietät.*
(iii) Wenn es $Y \subseteq \mathbb{K}^n$ lokal abgeschlossen gibt mit $X \cong Y$, so heißt X *quasiaffine Varietät.*

Bemerkung 2.1.10. Wir haben folgende Implikationen:

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{affin} \arrow[d] \\
\text{projektiv} \arrow[dr] & & \text{quasiaffin} \arrow[dl] \\
 & \text{quasiprojektiv} &
\end{tikzcd}$$

Weiter gilt:

(i) Lokal abgeschlossene Teilmengen quasiprojektiver bzw. -affiner Varietäten sind wieder quasiprojektive bzw. -affine Varietäten.

(ii) Abgeschlossene Teilmengen projektiver bzw. affiner Varietäten sind wieder projektive bzw. affine Varietäten.

Erinnerung 2.1.11. Falls X projektiv ist, gilt $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{K}$, insb. ist jedes $f \in \mathcal{O}_X(X)$ konstant.

Proposition 2.1.12. *Sei X quasiprojektiv, $Y \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraisch und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *φ ist ein Morphismus.*
(ii) *$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sind regulär auf X.*

Beweis. (Har77, Lem. I.3.6, S. 21) □

Proposition 2.1.13. *Sei X quasiprojektiv und Y affin. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi\colon \operatorname{Mor}_{\mathbb{K}}(X,Y) &\to \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[Y], \mathcal{O}_X(X)), \\ \varphi &\mapsto \varphi^* \end{aligned}$$

bijektiv und für $\varphi \in \operatorname{Mor}_{\mathbb{K}}(X,Y)$ ist $\operatorname{Bild}(\varphi) \subseteq Y$ dicht genau dann, wenn φ^* injektiv ist.

Beweis. (Har77, Prop. I.3.5, S. 20f.) □

2.2. Körper der rationalen Funktionen und rationale Morphismen[5].

Erinnerung 2.2.1. Sei X eine (sc. irreduzible) Prävarietät. Für $\mathbb{K}(X)$ gilt dann:

(i) Falls X affin ist, so hat man einen Isomorphismus
$$\operatorname{Quot}(\mathcal{O}_X(X)) \to \mathbb{K}(X), fg^{-1} \mapsto \left[X_g, fg^{-1}\right].$$

(ii) Für jedes $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen gilt $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(U)$.

(iii) Jedes $[U, f] \in \mathbb{K}(X)$ hat einen eindeutig bestimmten maximalen Repräsentanten (U', f'). Nenne dann $\operatorname{Def}(f) \coloneqq U'$ *Definitionsbereich* von f.

Bemerkung 2.2.2. Für projektive Varietäten bemerken wir folgendes:

(i) Sei $X \subseteq \mathbb{P}_n$ projektiv und $0 \leq i \leq n$ mit $X^i \neq \emptyset$. Dann gilt $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(X_i) \cong \operatorname{Quot}(\mathbb{K}[X_i])$.
(ii) Für die affinen Komponenten gilt $\mathbb{P}_n^i \cong \mathbb{K}^n$ mit $0 \leq i \leq n$, also auch $\mathbb{K}(\mathbb{P}_n) \cong \mathbb{K}(T_1, \dots, T_n)$.

Konstruktion 2.2.3 (Rationale Morphismen)**.** Seien X und Y Prävarietäten. Dann betrachte
$$\mathfrak{R}(X,Y) \coloneqq \{(U,\varphi);\, \emptyset \neq U \subseteq X \text{ offen}, \varphi\colon U \to Y \text{ Morphismus}\}.$$
sowie die Äquivalenzrelation $(U,\varphi) \sim (V,\psi) :\iff \varphi\restriction_{U\cap V} = \psi\restriction_{U\cap V}$. Nenne $[U,\varphi] \coloneqq [(U,\varphi)]$ *rationalen Morphismus* und notiere $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$. Setze weiter $\operatorname{Rat}_{\mathbb{K}}(X,Y) \coloneqq \mathfrak{R}(X,Y)/\sim$.

Erinnerung 2.2.4. Seien X und Y Prävarietäten.

(i) Jedes $[U,\varphi]\colon X \dashrightarrow Y$ hat einen eind. bestimmten maximalen Repräsentanten (U',φ'). Nenne dann $\operatorname{Def}(\varphi) \coloneqq U'$ *Definitionsbereich* von φ.

(ii) $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ heißt *dominant*, falls $\varphi(U) \subseteq Y$ dicht liegt.

[5] Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (Hau15, Kap. 5) und (Har77, Kap. I.4, S. 24ff.)

(iii) $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ heißt *birational*, falls $\emptyset \neq U \subseteq X$ und $\emptyset \neq V \subseteq Y$ existieren so, dass $\varphi\restriction_U\colon U \to V$ ein Isomorphismus ist. In diesem Falle nenne X und Y *birational äquivalent*.

(iv) Falls $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ birational ist, so gibt es $\psi\colon Y \dashrightarrow X$ so, dass $\psi\circ\varphi \sim \mathrm{id}_X$ und $\varphi\circ\psi \sim \mathrm{id}_Y$.

Bemerkung 2.2.5. Die quasiprojektiven Varietäten bilden zusammen mit den dominanten rationalen Morphismen eine Kategorie, in der der Isomorphiebegriff mit dem der birationalen Äquivalenz zusammenfällt.

Bemerkung 2.2.6. Seien X und Y quasiprojektiv.

(i) Sei $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ dominant. Dann finden wir $V \subseteq Y$ affin und $U \subseteq \varphi^{-1}(V)$ offen so, dass $\varphi\colon U \to V$ ein dominanter Morphismus ist. Dann ist der Komorphismus $\varphi^*\colon \mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}[U]$ nach Proposition 2.1.13 injektiv und fortsetzbar zu einem $\mathbb{K}$-Algebrenhomorphismus

$$\varphi^\sharp\colon \mathbb{K}(Y) \cong \mathbb{K}(V) \cong \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]) \to \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[U]) \cong \mathbb{K}(U) \cong \mathbb{K}(X).$$

Diese Fortsetzung ist unabhängig von der Wahl von V und U.

(ii) Sei $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ rational. Für $Y \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ bzw. $Y \subseteq \mathbb{P}_n$ lokal abgeschlossen können wir schreiben $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ bzw. $\varphi = [\varphi_0, \ldots, \varphi_n]$ mit $\varphi_i \in \mathbb{K}(X)$. Dann gilt

$$\mathrm{Def}(\varphi) = \bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{Def}(\varphi_i)$$

und weiter gilt $\varphi_i \in \mathcal{O}_X(\mathrm{Def}(\varphi))$.

Satz 2.2.7 (Erster Äquivalenzsatz)**.** *Zwischen den Kategorien*

(i) *Quasiprojektive Varietäten mit dominanten rationalen Morphismen.*
(ii) *Endlich erzeugte Körpererweiterungen über $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K}$-Homomorphismen.*

haben wir einen wesentlich surjektiven volltreuen kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{ccc} [\textit{Quasiprojektive Varietäten}] & \longrightarrow & [\textit{Endlich erzeugte Körpererweiterungen über } \mathbb{K}] \\ X & \mapsto & \mathbb{K}(X) \\ \varphi & \mapsto & \varphi^\sharp. \end{array}$$

Beweis. (nach (Har77, Thm. I.4.4, S. 25)) Dass $\mathcal{F}$ ein kontravarianter Funktor ist, ist klar. Es bleibt die wesentliche Surjektivität sowie die Volltreue zu zeigen.

Zunächst zur Volltreue: Seien X und Y quasiprojektive Varietäten und sei

$$\mathcal{F}\colon\ \mathrm{Rat}_{\mathbb{K}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(Y), \mathbb{K}(X)), \varphi \mapsto \varphi^\sharp$$

die Morphismenabbildung. Sei nun $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(Y), \mathbb{K}(X))$. Mit Bemerkung 2.2.6 (i) können wir Œ annehmen, dass Y affin ist. Seien nun $\mathbb{K}[Y] \ni f_1, \ldots, f_r\colon Y \to \mathbb{K}$ die Erzeuger von $\mathbb{K}[Y]$. Dann gilt $\psi(f_1), \ldots, \psi(f_r) \in \mathbb{K}(X)$, d. h. es gibt $U \subseteq X$ offen so, dass $\psi(f_1), \ldots, \psi(f_r) \in \mathcal{O}_X(U)$ gilt. Wir erhalten auf diese Weise einen Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[Y], \mathcal{O}_U(U)) \ni \Phi_\psi\colon \mathbb{K}[Y] \cong \mathbb{K}[f_1, \ldots, f_r] \to \mathcal{O}_U(U), f_i \to \psi(f_i)$$

von $\mathbb{K}$-Algebren. Wegen Proposition 2.1.13 entspricht dies einem Morphismus $\psi^\natural\colon U \to Y$ von Varietäten. Da U dicht in X liegt, ist $\psi^\natural\colon X \dashrightarrow Y$ rational. Da ψ als Körperhomomorphismus injektiv ist, ist auch $\psi^\natural$ injektiv und $\psi^\natural$ folglich dominant. Es lässt sich nun leicht nachrechnen, dass $(\psi^\natural)^\sharp = \psi$ gilt und $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ surjektiv ist. Weiter ist klar, dass $(\varphi^\sharp)^\natural = \varphi$ für alle $\mathrm{Rat}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ gilt, sodass insgesamt die Volltreue folgt.

Nun zur wesentlichen Surjektivität: Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung, also $\mathbb{L} = \mathbb{K}(y_1, \ldots, y_n)$ mit $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{L}$. Sei nun $A := \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$, also $\mathbb{K} \subseteq A \subseteq \mathbb{L}$. Betrachte nun den Epimorphismus

$$\Phi\colon \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n] \to A, T_i \mapsto y_i$$

Dann gilt mit dem HOMOMORPHIESATZ $A \cong \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]/\operatorname{Kern}(\Phi)$. Da $A \subseteq \mathbb{L}$ nullteilerfrei ist, folgt $\mathfrak{a} := \operatorname{Kern}(\Phi) \leq \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ prim, d. h. $Y := V_{\mathbb{K}^n}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{K}^n$ ist irreduzibel und damit eine affine Varietät und es gilt $A = \mathbb{K}[Y]$, sodass sich abschließend ergibt

$$\mathbb{K}(Y) \cong \operatorname{Quot}(\mathbb{K}[Y]) \cong \operatorname{Quot}(A) \cong \mathbb{K}(y_1, \dots, y_n) \cong \mathbb{L}. \qquad \square$$

2.3. **Nichtsinguläre Kurven**[6]**.**

Definition 2.3.1 (Krulldimension)**.** Sei X ein topologischer Raum bzw. R ein K1-Ring. Dann ist die *Krulldimension* von X bzw. R definiert durch

$$\dim(X) := \sup\left(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0};\ \exists\, \emptyset \neq A_0 \subsetneq \dots \subsetneq A_k \subseteq X \text{ mit } A_i \subseteq X \text{ abg. und irred.}\right),$$
$$\dim(R) := \sup\left(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0};\ \exists\, R \neq \mathfrak{p}_0 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}_k \supseteq \{0\} \text{ mit } \mathfrak{p}_i \leq R \text{ prim}\right).$$

Eine Prävarietät X mit $\dim(X) = 1$ heißt *Kurve*.

Erinnerung 2.3.2. Für eine Prävarietät X betrachte die Zariski-Krulldimension.

(i) Es gilt $\dim(X) = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X))$.
(ii) Für $U \subseteq X$ offen gilt $\dim(U) = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(U)) = \operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(X)) = \dim(X)$.
(iii) Für $X \subseteq \mathbb{P}_n$ lokal abgeschlossen und $0 \leq i \leq n$ mit $X^i \neq \emptyset$ gilt $\dim(X) = \dim(X_i)$.

Proposition 2.3.3. *Sei X eine Prävarietät und sei $x \in X$.*

(i) *$\mathcal{O}_{X,x}$ ist lokal mit $\mathfrak{m}_{X,x} := \{f_x \in \mathcal{O}_{X,x};\ f(x) = 0\}$ und es gilt $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \cong \mathbb{K}$.*
(ii) *Es gilt $\operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) \cong \mathbb{K}(X)$.*
(iii) *Es gilt $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(X)$.*

Beweis. Zu „(i)“: Betrachte hierzu $\Phi\colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}$, $f_x \mapsto f(x)$. Dann ist Φ wohldefiniert und surjektiv und es gilt $\operatorname{Kern}(\Phi) = \mathfrak{m}_{X,x}$, weswegen bereits mit dem HOMOMORPHIESATZ $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \cong \mathbb{K}$ und $\mathfrak{m}_{X,x}$ maximal folgt. Dass $\mathcal{O}_{X,x}$ lokal ist, ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass $\mathfrak{m}_{X,x}$ alle Nichteinheiten enthält.

Zu „(ii)“: Wir identifizieren $\mathcal{O}_{X,x} = \{f \in \mathbb{K}(X);\ x \in \operatorname{Def}(f)\} \subseteq \mathbb{K}(X)$, weswegen $\operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) \subseteq \mathbb{K}(X)$ folgt. Für „$\supseteq$“ ziehen wir uns auf eine Überdeckungskomponente um x zurück, sodass wir annehmen können, dass X affin ist. Dann haben wir eine Inklusionskette

$$\mathbb{K}[X] = \mathcal{O}_X(X) \subseteq \mathcal{O}_{X,x} \subseteq \mathbb{K}(X),$$

sodass die Behauptung bereits mit $\mathbb{K}(X) \cong \operatorname{Quot}(\mathbb{K}[X])$ folgt.

Aussage „(iii)“ wird in (Har77, Thm. I.3.2, S. 17) für X affin gezeigt. Für den allgemeinen Fall betrachte $U \subseteq X$ affin mit $x \in U$ und bemerke $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{U,x}) = \dim(U) = \dim(X)$. $\square$

Definition 2.3.4.

(i) Ein noetherscher lokaler Integritätsring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \leq R$ heißt *regulär*, falls $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(R)$ mit $k := R/\mathfrak{m}$.
(ii) Eine Prävarietät X heißt *regulär* oder *nichtsingulär* in $x \in X$, falls $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist. Dann nenne $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ *Tangentialraum* von X an p. Eine Prävarietät X heißt *regulär* oder *nichtsingulär*, falls X nichtsingulär in allen $x \in X$ ist.
(iii) Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ heißt *regulär* oder *nichtsingulär* in $x \in \mathbb{K}^n$, falls es ein $1 \leq i \leq n$ gibt so, dass $\partial_i f(x) \neq 0$ gilt.

Erinnerung 2.3.5. Sei $X := V_{\mathbb{P}_n}(f)$ mit $f \in \mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]$ homogen sowie $\operatorname{Char}(\mathbb{K}) = 0$. Sei weiter $x \in X$ und $0 \leq i \leq n$ mit $x \in \mathbb{P}_n^i$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist regulär in x.
(ii) f ist regulär in x.
(iii) X_i ist regulär in $\mathfrak{A}_i(x)$.
(iv) $f_{(i)}$ ist regulär in $\mathfrak{A}_i(x)$.

[6] Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (Hau15, Kap. 6) und (Har77, Kap. I.6, S. 39ff.)

Definition 2.3.6. Sei R ein Integritätsring. Eine surjektive Abbildung $\nu\colon \operatorname{Quot}(R)^* \to \mathbb{Z}$ heißt *diskrete Bewertung*, falls gilt:

(i) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ für alle $x, y \in \operatorname{Quot}(R)^*$.
(ii) $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ für alle $x, y \in \operatorname{Quot}(R)^*$ mit $y \neq -x$.

Falls für R eine diskrete Bewertung existiert und ferner

$$R = \{x \in \operatorname{Quot}(R)^*;\ \nu(x) \geq 0\} \,\dot\cup\, \{0\}$$

gilt, so heißt R *diskreter Bewertungsring.*

Proposition 2.3.7. *Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \leq R$ und es gelte $\dim(R) = 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *R ist ein diskreter Bewertungsring.*
(ii) *R ist normal.*
(iii) *$\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.*
(iv) *R ist regulär.*
(v) *Es gibt ein $t \in R$ so, dass es für alle $\{0_R\} \neq \mathfrak{a} \leq R$ ein $n(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit $\mathfrak{a} = \langle t^{n(\mathfrak{a})}\rangle$.*

In diesem Falle gilt $\mathfrak{m} = \langle t\rangle$ sowie $\mathfrak{m}^k = \langle t^k\rangle \supsetneq \langle t^{k+1}\rangle = \mathfrak{m}^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Beweis. Siehe (AM69, Prop. 9.2, S. 94) □

Konstruktion 2.3.8 (Bewertung bezüglich Uniformierendem)**.** Sei R ein regulärer noetherscher lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \langle t\rangle$. Dann gibt es für jedes $a \in R$ genau ein $n(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $\langle a\rangle = \langle t^{n(a)}\rangle$. Dann ist

$$\nu_t\colon \operatorname{Quot}(R)^* \to \mathbb{Z}, \frac{a}{b} \mapsto n(a) - n(b)$$

eine diskrete Bewertung, genannt Bewertung *bezüglich t*. Nenne weiter das (bis auf Assoziiertheit eindeutige) $t \in R$ *Uniformisierendes.*

Folgerung 2.3.9. *Sei X eine Kurve, die regulär in $x \in X$ ist. Dann gilt:*

(i) *$\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 1, also $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2 \cong \mathbb{K}$*
(ii) *$\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein diskreter Bewertungsring und $\mathfrak{m}_{X,x}$ ist ein Hauptideal.*
(iii) *Wir haben eine diskrete Bewertung $\operatorname{ord}_x \coloneqq \nu_t$ auf $\mathbb{K}(X)$.*

Beweis. Zu „(i)“: Wir wissen, dass $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ ein Vektorraum über $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \cong \mathbb{K}$ ist und weiter, dass wegen der Regularität von $\mathcal{O}_{X,x}$ gilt

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(X) = 1.$$

Die Aussagen „(ii)“ folgen unmittelbar aus der Äquivalenz von Proposition 2.3.7. □

Satz 2.3.10 (Zweiter Äquivalenzsatz)**.** *Folgende Kategorien sind äquivalent:*

(i) *Nichtsinguläre projektive Kurven mit dominanten Morphismen.*
(ii) *Quasiprojektive Kurven mit dominanten rationalen Abbildungen.*
(iii) *1-Erweiterungen über $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K}$-Homomorphismen.*

Beweis. (Har77, Cor. I.6.12, S. 45f.) □

Bemerkung 2.3.11. Zusätzlich zu der Tatsache, dass uns dieser Äquivalenzsatz eine der entscheidenden Äquivalenzen liefert, ist er ziemlich erstaunlich: Für nichtsinguläre projektive Kurven ist es das Gleiche, ob sie birational äquivalent oder isomorph sind.

3. Kompakte Riemannsche Flächen

3.1. Grundeigenschaften Riemannscher Flächen[7].

Definition 3.1.1. Eine topologischer Raum (X, Ω) heißt *(n-dimensionale) topologische Mannigfaltigkeit*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) X ist zusammenhängend, hausdorffsch und erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.
(ii) X ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.1.2. Sei (X, Ω) eine zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

(i) Für $U \subseteq X$ offen und $V \subseteq \mathbb{C}$ offen sowie einen Homöomorphismus $\alpha\colon U \to V$ heißt (U, α) *komplexe Karte*.
(ii) Seien $\alpha_i\colon U_i \to V_i$ für $i \in \{1, 2\}$ komplexe Karten. α_1 und α_2 heißen *biholomorph verträglich*, falls $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}\colon \varphi(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ biholomorph ist.
(iii) Eine Menge $\mathcal{A} \coloneqq \{(U_i, \alpha_i)\}_{i\in I}$ von paarweise biholomorph verträglichen Karten heißt *komplexer Atlas*, falls $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X ist. Falls $\mathcal{A}$ alle zu $\mathcal{A}$ verträglichen Karten enthält, so heißt $\mathcal{A}$ *komplexe Struktur*.
(iv) (X, Ω) zusammen mit einer komplexen Struktur $\mathcal{A}$ auf X heißt *Riemannsche Fläche*.

Bemerkung 3.1.3. Sei $(X, \mathcal{A})$ eine Riemannsche Fläche und sei $U \subseteq X$ offen. Dann ist U zusammen mit der Teilraumtopologie und dem Atlas

$$\mathcal{A}\restriction_U \coloneqq \{(U_i \cap U, \varphi_i \restriction_{U_i\cap U});\ (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A} \text{ und } U_i \cap U \neq \emptyset\}$$

auch eine Riemannsche Fläche.

Konstruktion 3.1.4 (Garbe der holomorphen Funktionen)**.** Sei X eine Riemannsche Fläche und sei $U \subseteq X$ offen. Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls $f \circ \alpha^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist für alle Karten[8] (V, α) mit $V \cap U \neq \emptyset$. Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_X\colon [\text{Offene Teilmengen von } X] &\longrightarrow [\mathbb{C}\text{-Algebren}], \\ U &\mapsto \{\varphi\colon U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\} \end{aligned}$$

ist zusammen mit den kanonischen Restriktionsmorphismen eine Garbe von $\mathbb{C}$-Algebren, sodass $(X, \mathcal{H}_X)$ zu einem Raum mit $\mathbb{C}$-Funktionen. Ein *Morphismus* (bzw. eine *holomorphe Abbildung*) $\varphi\colon X \to Y$ von Riemannschen Flächen ist eine Abbildung, die ein Morphismus in der Kategorie der Räume mit $\mathbb{C}$-Funktionen ist. Wir bezeichnen die Menge aller nichtkonstanten holomorphen Abbildungen mit $\mathrm{Hol}(X, Y)$.

Die kompakten Riemannschen Flächen bilden zusammen mit den nichtkonstanten holomorphen Abbildungen eine Kategorie. In dieser Kategorie nennen wir die Isomorphismen *biholomorph*.

Lemma 3.1.5 (Lokale Gestalt holomorpher Abbildungen)**.** *Seien X und Y Riemannsche Flächen und $\varphi\colon X \to Y$ nichtkonstant sowie $x \in X$ und $y \coloneqq \varphi(x)$. Dann gibt es ein eindeutiges $k \coloneqq \nu(\varphi, x) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und Karten $\alpha\colon U \to V \subseteq \mathbb{C}$ um x bzw. $\beta\colon U' \to V' \subseteq \mathbb{C}$ um y so, dass gilt:*

(i) $\alpha(x) = \beta(y) = 0$.
(ii) $\varphi(U) \subseteq U'$
(iii) *Für $\Phi \coloneqq \beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}\colon V \to V'$ gilt $\Phi(z) = z^k$.*

In dieser Situation nennen wir $\nu(\varphi, x)$ Vielfachheit.

Beweis. Siehe (For77, Satz I.2.1, S. 9) □

[7] Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (For77, Kap. I.1 & I.2, S. 1ff.).

[8] Es genügt, die Holomorphie für eine beliebige Karte nachzuweisen, der Rest folgt durch die biholomorphe Verträglichkeit der Kartenwechsel.

Satz 3.1.6. *Sei X eine Riemannsche Fläche.*

(i) IDENTITÄTSSATZ
Sei Y eine weitere Riemannsche Fläche, $\varphi_1, \varphi_2 \colon X \to Y$ zwei Morphismen, $A \subseteq X$ mit Häufungspunkt $a \in X$ und $\varphi_1 \restriction_A = \varphi_2 \restriction_A$. Dann gilt $\varphi_1 = \varphi_2$.

(ii) HEBBARKEITSSATZ
Sei $U \subseteq X$ offen, $A \subseteq U$ diskret, $f \in \mathcal{H}_X(U \setminus A)$ für alle $a \in A$ in einer Umgebung $U_a \ni a$ beschränkt. Dann gibt es $\tilde{f} \in \mathcal{H}_X(U)$ mit $f = \tilde{f} \restriction_{U \setminus A}$.

(iii) SATZ DER OFFENEN ABBILDUNG
Sei Y eine weitere Riemannsche Fläche und $\varphi \colon X \to Y$ ein nichtkonstanter Morphismus. Dann ist φ eine offene Abbildung.

Beweis. (nach (For77, Satz I.1.8/I.1.11, Cor. I.2.2, S. 6f.)) Zu „(i)“: Betrachte die offene Menge

$$M := \{x \in X; \text{ es gibt } W \subseteq X \text{ offen mit } \varphi_1 \restriction_W = \varphi_2 \restriction_W\}.$$

Dann gilt $M \neq \emptyset$, denn $a \in M$. Sei nun $b \in \partial M$. Da φ_1 und φ_2 insb. stetig sind, ist $\{\varphi_1 = \varphi_2\}$ abgeschlossen und es gilt $b \in \overline{M} \subseteq \overline{\{\varphi_1 = \varphi_2\}} = \{\varphi_1 = \varphi_2\}$, also $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$. Folglich gibt es Karten $\alpha \colon U \subseteq X \to V \subseteq \mathbb{C}$ sowie $\beta \colon U' \subseteq Y \to V' \subseteq \mathbb{C}$ so, dass $b \in U$ und $\varphi_i(U) \subseteq U'$ für $i \in \{1, 2\}$. Wir dürfen U zusammenhängend annehmen. Betrachte jetzt

$$\Phi_i := \beta \circ \varphi_i \circ \alpha^{-1} \colon V \to V' \subseteq \mathbb{C}.$$

Dann haben wir $\Phi_1 \restriction_{\alpha(U \cap M)} = \Phi_2 \restriction_{\alpha(U \cap M)}$. Aus dem IDENTITÄTSSATZ für holomorphe Funktionen folgt damit $\Phi_1 = \Phi_2$; also gilt $\varphi_1 \restriction_U = \varphi_2 \restriction_U$ und damit $b \in M$. Insgesamt folgt, dass M abgeschlossen ist. Da aber M auch offen ist und X zusammenhängt, folgt die Behauptung.

Aussage „(ii)“ folgt direkt aus dem RIEMANNSCHEN HEBBARKEITSSATZ in der komplexen Ebene und Aussage „(iii)“ folgt aus Lemma 3.1.5. □

Proposition 3.1.7. *Falls X kompakt ist, ist jedes $f \in \mathcal{H}_X(X)$ konstant.*

Beweis. (nach (For77, Cor. I.2.4/Satz I.2.7/Cor. I.2.8, S. 9f)) Sei nun X kompakt. Da f stetig ist, ist $f(X)$ auch kompakt und mit HEINE-BOREL abgeschlossen, aber mit dem Satz der OFFENEN ABBILDUNG auch offen. Da Y zusammenhängt und $f(X) \neq \emptyset$ gilt, folgt, dass auch Y kompakt ist.

Klarerweise ist $f \in \mathcal{H}_X(X)$ ein Morphismus $f \colon X \to \mathbb{C}$, d. h. falls f nichtkonstant ist, muss $\mathbb{C}$ kompakt sein, was jedoch nicht der Fall ist. □

3.2. **Die Riemannsche Zahlenkugel und Funktionenkörper.**

Vereinbarung 3.2.1. Betrachte folgende drei Räume mit ihren jeweiligen Topologien:

(i) $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \,\dot\cup\, \{\infty\}$ mit der Alexandroff-Kompaktifizierung von $\Omega_{\mathbb{C}}$ bzgl. ∞.
(ii) $\mathbb{P}_1$ mit der kanonischen Quotiententopologie[9] von $\pi_n \colon \mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\} \to \mathbb{P}_1$.
(iii) $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Teilraumtopologie bzgl. $(\mathbb{R}^3, \Omega_{\mathbb{R}^3})$.

Bemerkung 3.2.2. Wir haben eine Kette von Homöomorphismen

$$\mathbb{S}^2 \xleftrightarrow[\Phi \,:\, (x_1,x_2,x_3) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right) & \text{für } x_3 \neq 1 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}]{\cong} \mathbb{C}_\infty \xleftrightarrow[\Psi \,:\, z \mapsto \begin{cases} [z,1] & \text{für } z \in \mathbb{C} \\ [1,0] & \text{sonst} \end{cases}]{\cong} \mathbb{P}_1,$$

insb. ist jeder der Räume kompakt und genügt dem 2. Abzählbarkeitsaxiom.

[9] Hier dann natürlich ausgehend von der komplexen Teilraumtopologie auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0_2\}$, nicht von der Zariski-Topologie.

Konstruktion 3.2.3 (Riemannsche Zahlenkugel)**.** $\mathbb{P}_1$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche mit der von den beiden Karten[10]

$$\alpha_0 \colon U_0 \coloneqq \mathbb{P}_1 \setminus V_{\mathbb{P}_1}(T_0) \to \mathbb{C}, [z,w] \mapsto \Psi^{-1}([w,z]) = wz^{-1}$$
$$\alpha_1 \colon U_1 \coloneqq \mathbb{P}_1 \setminus V_{\mathbb{P}_2}(T_1) \to \mathbb{C}, [z,w] \mapsto \Psi^{-1}([z,w]) = zw^{-1}$$

erzeugten komplexen Struktur. Wir nennen $\mathbb{P}_1$ *Riemannsche Zahlenkugel.*

Bemerkung 3.2.4. Je nach Notwendigkeit können wir die Riemannsche Zahlenkugel als $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{P}_1$ oder $\mathbb{S}^2$ beschreiben. In diesem Falle lauten unsere Karten

$$\alpha_0' \colon U_0' \coloneqq \Psi^{-1}(U_0) = \mathbb{C}_\infty^* \to \mathbb{C}, z \mapsto z^{-1}$$
$$\alpha_1' \colon U_1' \coloneqq \Psi^{-1}(U_1) = \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z,$$

also Inversion (mit $\infty^{-1} \coloneqq 0$) und Identität, und ebenso

$$\alpha_0'' \colon U_0'' \coloneqq (\Psi \circ \Phi)^{-1}(U_0) = \mathbb{S}^2 \setminus \{-n\} \to \mathbb{C}, (x_1,x_2,x_3) \mapsto \Phi(x_1,x_2,-x_3)$$
$$\alpha_1'' \colon U_1'' \coloneqq (\Psi \circ \Phi)^{-1}(U_1) = \mathbb{S}^2 \setminus \{n\} \to \mathbb{C}, \quad (x_1,x_2,x_3) \mapsto \Phi(x_1,x_2,x_3)$$

mit $n \coloneqq (0,0,1)$, also stereographische Südpol- und Nordpolprojektion.

Definition 3.2.5. Sei X eine Riemannsche Fläche und sei $U \subseteq X$ offen. Ein Morphismus

$$f \colon U \to \mathbb{P}_1$$

heißt *meromorph*, falls $f \not\equiv \infty$ gilt. Sei $\mathcal{M}_X(U)$ die Menge dieser.

Proposition 3.2.6. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $U \subseteq X$ offen.*

(i) *Es gilt $\mathcal{M}_X(U) = \mathcal{M}_U(U)$.*
(ii) *Für $f \in \mathcal{M}_X(U)$ ist $\{f = \infty\}$ eine diskrete Menge.*
(iii) *Für $f \in \mathcal{M}_X(U)$ mit $f \not\equiv 0$ ist $\{f = 0\}$ diskret.*

Beweis. Aussage „(i)“ ist klar und Aussage „(ii)“ ist eine direkte Folgerung aus dem Identitätssatz 3.1.6 (i). Analog folgt in „(iii)“, dass für $f \not\equiv 0$ die Menge $\{f = 0\}$ diskret ist. ☐

Konstruktion 3.2.7 (Funktionenkörper)**.** Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Für $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{M}_X(U)$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{C}$. Wir nennen $\mathcal{M}(X) \coloneqq \mathcal{M}_X(X)$ *Funktionenkörper* von X. Für einen Morphismus $\varphi \colon X \to Y$ haben wir einen Homomorphismus

$$\varphi^\flat \colon \mathcal{M}(Y) \mapsto \mathcal{M}(X), f \mapsto f \circ \varphi,$$

von Körpererweiterungen über $\mathbb{C}$, den wir *Komorphismus* nennen.

Konstruktion 3.2.8 (Singularitäten)**.** Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $f \in \mathcal{M}(X)$.

(i) Sei $N(f) \coloneqq \{f = 0\}$, $A(f) \coloneqq \{f = \infty\}$ und $S(f) \coloneqq N(f) \cup A(f)$ die Nullstellen-, Polstellen- und Singularitätenmenge.
(ii) Für $f \not\equiv 0$ und $x \in X$ sei die *Ordnung* $\operatorname{ord}^x(f)$ das eindeutige $k \in \mathbb{Z}$ so, dass nach Übergang zu Koordinaten $g \coloneqq (\operatorname{id} - x)^{-k} \cdot f$ holomorph in x mit $g(x) \neq 0$ fortgesetzt werden kann.

Klarerweise ist $A(f)$ und für $f \not\equiv 0$ auch $N(f)$ und $S(f)$ endlich.[11]

Beispiel 3.2.9. Es gilt $\mathcal{M}(\mathbb{P}_1) \cong \mathbb{C}(T) \cong \mathbb{C}(\mathbb{P}_1)$.

---

[10] Offensichtlich sind α_0 und α_1 genau die affinen Karten $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ aus Erinnerung 2.1.8, die hier nun nicht nur zariski-, sondern auch borel-homöomorph sind. Dies wird in Proposition 4.2.4 noch allgemeiner für $\mathbb{P}_n$ gezeigt.

[11] Dies gilt, denn die entsprechenden Mengen sind mit dem Identitätssatz diskret und darüber hinaus noch abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge, also kompakt.

Beweis. (nach (For77, Cor. I.2.9, S. 10)) Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_1)$. Wir wissen, dass $\mathbb{P}_1$ kompakt ist, d. h. wir können mit Proposition 3.2.6 (ii) schließen, dass f nur endlich viele Polstellen hat. Dann gilt Œ $f(\infty) \neq \infty$, denn sonst betrachte $1/f$.

Sei also $A(f) =: \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Dann gibt es für $1 \leq i \leq n$ Koeffizienten a_{ij} mit $k_i \leq j \leq -1$ so, dass

$$h_k\colon z \mapsto \sum_{j=k_i}^{-1} a_{ij} \cdot (z - z_i)^j$$

der Hauptteil von f in z_i ist. Dann gilt $g \coloneqq f - (h_1 + \cdots + h_n) \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}_1}(\mathbb{P}_1)$. Mit Proposition 3.1.7 schließen wir, dass g konstant ist, d. h. f ist rational wie gewünscht. □

3.3. **Algebraische Funktionen**[12]**.**

Proposition 3.3.1. *Jede topologische Mannigfaltigkeit ist wegzusammenhängend.*

Beweis. Für $x \in X$ betrachte die Menge

$$M \coloneqq \{x' \in X;\ \exists\, \gamma\colon [0,1] \to X, \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = x'\}.$$

Dann gilt $x \in M \neq \emptyset$. Sei nun $x' \in M$, d. h. es gibt einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x'$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie einen Homöomorphismus $\varphi\colon U \to V$, wobei wir Œ U und V zusammenhängend annehmen können. Da $V \subseteq \mathbb{R}^n$, ist V wegzusammenhängend und für jedes $x'' \in U$ gibt es einen Weg $\tilde{\gamma}\colon [1,2] \to V$ mit $\tilde{\gamma}(1) = \varphi(x')$ und $\tilde{\gamma}(2) = \varphi(x'')$. Dann ist

$$\gamma_2\colon [0,1] \to X, t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{für } t \leq 1/2, \\ \varphi^{-1}(\tilde{\gamma}(2t)) & \text{für } t > 1/2 \end{cases}$$

ein Weg von x nach x'', sodass insgesamt M offen ist. Auf gleiche Weise sieht man ein, dass $X \setminus M$ offen sein muss, sodass insgesamt wegen des Zusammenhangs von X die Tatsache $M = X$ und damit X wegzusammenhängend folgt. □

Proposition 3.3.2. *Seien X und Y kompakte Riemannsche Flächen und $\varphi\colon X \to Y$ ein nicht-konstanter Morphismus. Dann gilt:*

(i) *φ ist eine Überlagerung und $x \in X_\varphi$ gilt genau dann, wenn $\nu(\varphi, x) \geq 2$.*
(ii) *Jede Faser $\varphi^{-1}(y)$ ist endlich.*
(iii) *Die Mengen $X_\varphi \subseteq X$ und $Y_\varphi \subseteq Y$ sind endlich und abgeschlossen.*

Beweis. (nach (For77, Lem. I.4.21/I.4.23, S. 27f.)) Zu „(i)“: Mit dem Satz der OFFENEN ABBILDUNG ist φ offen. Der IDENTITÄTSSATZ liefert uns ferner, dass jede Faser diskret ist, da andernfalls es eine Faser mit Häufungspunkt gäbe und φ konstant wäre. φ ist definitionsgemäß stetig, sodass insgesamt folgt, dass φ eine Überlagerung ist. Der Zusatz ist klar.

Zu „(ii)“: Da φ nach (i) eine Überlagerung ist, ist insb. jede Faser diskret, sodass zusammen mit der Kompaktheit die Endlichkeit folgt.

Zu „(iii)“: Sei $x \in X \setminus X_\varphi$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ um x so, dass $\varphi\restriction_U$ injektiv ist. Für alle $x' \in U$ ist aber $U \subseteq X$ ebenfalls eine offene Umgebung um x' und $\varphi\restriction_U$ ist injektiv, sodass $x' \in X \setminus X_\varphi$ folgt. Insgesamt ist $X \setminus X_\varphi$ offen und X_φ abgeschlossen. Da φ stetig ist und X sowie Y kompakt sind, ist auch $Y_\varphi = \varphi(X_\varphi)$ abgeschlossen.

Zeige noch die Endlichkeit: Da X kompakt ist, genügt es, zu zeigen, dass X_φ diskret ist: Sei hierzu $x \in X_\varphi$. Wegen Lemma 3.1.5 gibt es Karten (U, α) um x bzw. (V, β) um $y \coloneqq \varphi(x)$ so, dass $\varphi(U) \subseteq V$ sowie $\alpha(x) = \beta(y) = 0$ und $(\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1})(z) = z^k$ für alle $z \in U' \coloneqq \alpha(U)$. Sei nun $x' \in U \setminus \{x\}$ mit Polardarstellung $x' = r_0 \cdot \exp(2\pi i \cdot t_0)$. Dann betrachte den offenen Halbkegel

$$U'' \coloneqq \{r \cdot \exp(2\pi i \cdot t);\ r > 0 \text{ und } t_0 - \pi/k < t < t_0 + \pi/k\}$$

[12] Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (For77, Kap. I.4 & Kap. I.8, S. 1ff.)

sowie $W' := U' \cap U''$ und $W := \alpha^{-1}(W) \subseteq X$ offen. Dann ist $(\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}) \restriction_{W'}$ und dadurch insbesondere $\varphi \restriction_W$ injektiv, weswegen $x' \notin X_\varphi$ und insgesamt X_φ diskret, insb. endlich folgt. Dass dann auch Y_φ endlich ist, ist trivial. □

Vereinbarung 3.3.3. Seien X und Y kompakte Riemannsche Flächen, $\varphi\colon X \to Y$ ein nichtkonstanter Morphismus und $y \in Y$. Für

$$n := \sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} \nu(\varphi, x)$$

sage, φ nehme y *mit Vielfachheit m mal* an.

Konstruktion 3.3.4 (Blätterzahl holomorpher Abbildungen)**.** Seien X und Y kompakte Riemannsche Flächen und $\varphi\colon X \to Y$ ein nichtkonstanter Morphismus. Dann gibt es ein eindeutiges $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ so, dass φ jedes $y \in Y$ mit Vielfachheit genau n mal annimmt. Nenne φ dann *n-blättrigen Morphismus.*

Lemma 3.3.5. *Sind X und Y lokalkompakte Räume und $\varphi\colon X \to Y$ eine eigentliche Überlagerung, $y \in Y$ und $U \subseteq X$ offen mit $\varphi^{-1}(y) \subseteq U$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von y so, dass $\varphi^{-1}(V) \subseteq U$.*

Beweis des Lemmas. (nach (For77, Lem. I.4.21, S. 27)) Da φ nach Bemerkung 1.3.3 (ii) abgeschlossen ist, ist $B := f(X \setminus U)$ abgeschlossen mit $y \notin B$. Dann ist $V := Y \setminus B$ eine offene Umgebung um y mit der gewünschten Eigenschaft. □

Beweis der Behauptung. (nach (For77, Satz I.4.24, S. 28)) Betrachte $X' := X \setminus X_\varphi$ sowie $Y' := Y \setminus Y_\varphi$. Dann ist $\psi := \varphi \restriction_{X'}\colon X' \to Y'$ eine eigentliche und unverzweigte Überlagerung. Da X' lokalkompakt ist, ist mit Proposition 1.3.5 (iii) ψ auch unbegrenzt und es gibt ein eindeutiges $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ so, dass $\#\varphi^{-1}(y) \cap X' = \#\psi^{-1}(y) = n$ für alle $y \in Y$.

Betrachte nun $y \in Y_\varphi$ und $\varphi^{-1}(y) =: \{x_1, \dots, x_r\}$ sowie $k_i := \nu(f, x_i)$. Mit Lemma 3.1.5 gibt es offene Umgebungen U_i von x bzw. V_i von y so, dass $\#(\varphi^{-1}(y') \cap U_i) = k_i$ für alle $y' \in V_i \setminus \{y\}$ gilt. Mit Lemma 3.3.5 gibt es $V \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_r$ so, dass $\varphi^{-1}(V) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_r$. Für $y' \in V \cap Y'$ gilt dann $n = \#\varphi^{-1}(y') = k_1 + \dots + k_r$, sodass die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.3.6. Es bietet sich womöglich an, diese Begriffe in einem Schaubild festzuhalten. Seien X und Y kompakt und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann haben wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{unverzweigter Morphismus} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \text{unbegrenzte Überlagerung} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\text{Morphismus} \arrow[d] & & \text{unverzweigte Überlagerung} \arrow[ur, dashed, bend left, "\text{lokalkomp.}"] & \\
\text{Def. II Blätterzahl} & & & \text{Def. I Blätterzahl}
\end{tikzcd}$$

Im Falle eines unverzweigten Morphismus stimmen diese beiden Definitionen von Blätterzahl klarerweise überein.

Erinnerung 3.3.7. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$. Dann sei

$$\sigma_k := \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \#S = k}} \prod_{i \in S} T_i \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$$

das *(n, k)-te elementarsymmetrische Polynom.*

Konstruktion 3.3.8. Seien X und Y kompakte Riemannsche Flächen und $\varphi\colon X \to Y$ ein unverzweigter n-blättriger Morphismus. Sei weiter $f \in \mathcal{M}(X)$. Dann hat jedes $y \in Y$ eine offene

Umgebung $V \subseteq Y$ so, dass

$$\varphi^{-1}(V) = \dot{\bigcup_{i=1}^{r}} U_i$$

mit $U_i \subseteq X$ offen und $\varphi_i := \varphi \restriction_{U_i}: U_i \to V$ biholomorph. Betrachte $\psi_i := (\varphi_i)^{-1} : V \to U_i$ sowie $f_i := f \circ \psi : V \to \mathbb{P}_1$. Dann gibt es $c_0 \ldots, c_{n-1} \in \mathcal{M}_Y(V)$ so, dass

$$\prod_{i=1}^{n}(T - f_i) = T^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k T^k \in \mathcal{M}_Y(V)[T]$$

gilt. Dabei gilt offensichtlich $c_k = (-1)^k \cdot \sigma_k(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{M}_Y(V)$. Für eine andere Umgebung $V' \subseteq Y$ erhalte $c'_0, \ldots, c'_{n-1} \in \mathcal{M}_Y(V')$, für diese gilt $c_k \restriction_{V \cap V'} = c'_k \restriction_{V \cap V'}$. Wir erhalten also mit dem 2. Garbenaxiom meromorphe Funktionen $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathcal{M}(Y)$ und nennen diese *elementarsymmetrische Funktionen* bzgl. φ und f.

Proposition 3.3.9. *Seien X und Y kompakte Riemannsche Flächen, $\varphi: X \to Y$ ein n-blättriger Morphismus und $f \in \mathcal{M}(X \setminus X_\varphi)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f lässt sich auf X meromorph fortsetzen.*
(ii) *Alle $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathcal{M}(Y \setminus Y_\varphi)$ lassen sich auf Y meromorph fortsetzen.*

Insb. existieren für alle $f \in \mathcal{M}(X)$ meromorphe Funktionen $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathcal{M}(Y)[T]$ im Sinne von Konstruktion 3.3.8

Beweis. Siehe (For77, Satz I.8.2, S. 45) □

Proposition 3.3.10. *Seien X und Y kompakte Riemannsche Flächen und sei $\varphi: X \to Y$ ein n-blättriger Morphismus. Für alle $f \in \mathcal{M}(X)$ und ihre zugehörigen elementarsymmetrischen Funktionen $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathcal{M}(Y)$ gilt dann*

$$f^n + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^\flat(c_k) \cdot f^k = 0,$$

insb. gilt $[\mathcal{M}(X) : \varphi^\flat(\mathcal{M}(Y))] \leq n$ und $\mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(Y)(f)$ für ein geeignetes $f \in \mathcal{M}(X)$.

Beweis. Die Gleichung ist unmittelbar einsichtig und die zusätzliche Aussage folgt mit dem Satz vom primitiven Element. □

4. Äquivalenz der Kategorien

Wir werden in diesem Abschnitt ausführen, auf welche Weise im Allgemeinen eine Äquivalenz zwischen den drei Kategorien

(i) Nichtsinguläre projektive Kurven über $\mathbb{C}$ mit dominanten Morphismen
(ii) Endlich erzeugte Körpererweiterungen $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{L}$ mit $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{C}}(\mathbb{L}) = 1$ mit $\mathbb{C}$-Homomorphismen
(iii) Kompakte Riemannsche Flächen mit nichtkonstanten Morphismen

zu erwarten ist. Hierbei wurde „(i) $\longleftrightarrow$ (ii)“ bereits in 2.3 gezeigt. Wir werden nun mithilfe des Körpers der meromorphen Funktionen $\mathcal{M}(X)$ und dem Komorphismus $\varphi^\flat$ einen kovarianten Funktor „(iii) $\longrightarrow$ (ii)“ konstruieren und dessen wesentliche Surjektivität und Volltreue zeigen. Im Zuge dessen wird auch ausgeführt, wie man von bestimmten nichtsingulären projektiven Kurven über $\mathbb{C}$ auf kanonische Weise zu Riemannschen Flächen kommt.

4.1. **Transzendenzgrad von $\mathcal{M}(X)$[13].**

Definition 4.1.1 (Divisorengruppe)**.** Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Eine formale Summe

$$D \coloneqq \sum_{i=1}^{r} k_i \cdot x_i$$

mit $n_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X$ paarweise verschieden heißt *(Weil-)divisor*. Die Menge $\mathrm{WDiv}(X)$ der Weildivisoren ist bzgl. der kanonischen Addition eine Gruppe und heißt *Weildivisorengruppe*.

(i) Für einen Divisor D heißt $\deg(D) \coloneqq k_1 + \cdots + k_r \in \mathbb{Z}$ *Grad* des Divisors.
(ii) $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ heißt *effektiv*, falls $k_i \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq r$ gilt.

Definiere ferner für $D \coloneqq k_1 \cdot x_1 + \cdots + k_r \cdot x_r \in \mathrm{WDiv}(X)$

$$D_+ \coloneqq \sum_{i=1}^{r} (k_i)_+ \cdot x_i \quad \text{und} \quad D_- \coloneqq \sum_{i=1}^{r} (k_i)_- \cdot x_i,$$

wobei $(k_i)_\pm$ den Positiv- bzw. Negativanteil von k_i bezeichnet. Dann sind D_+ und D_- effektiv und es gilt $D = D_+ - D_-$.

Konstruktion 4.1.2 (Hauptdivisoren)**.** Sei $f \in \mathcal{M}(X)^*$. Dann sind

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(f) &\coloneqq \sum_{x \in S(f)} \mathrm{ord}^x(f) \cdot x, \\ \mathrm{div}_0(f) &\coloneqq \sum_{x \in N(f)} \mathrm{ord}^x(f) \cdot x, \\ \text{sowie} \quad \mathrm{div}_\infty(f) &\coloneqq \sum_{x \in A(f)} \mathrm{ord}^x(f) \cdot x \end{aligned}$$

Divisoren und es gilt $\mathrm{div} = \mathrm{div}_0 + \mathrm{div}_\infty$. Wir nennen $\mathrm{div}(f)$ *Hauptdivisor* sowie $\mathrm{div}_0(f)$ bzw. $\mathrm{div}_\infty(f)$ *Null-* bzw. *Polstellendivisor*.

Konstruktion 4.1.3 (Dimension eines Divisors)**.** Sei $D \coloneqq k_1 \cdot x_1 + \cdots + k_r \cdot x_r \in \mathrm{WDiv}(X)$. Dann betrachte

$$\mathcal{L}(D) \coloneqq \{f \in \mathcal{M}(X)^*;\ D + \mathrm{div}(f) \text{ ist effektiv}\} \cup \{0\},$$

d. h. für $f \in \mathcal{L}(D)$ gilt $A(f) \subseteq \{x_1, \ldots, x_r\}$ und $\mathrm{ord}^{x_i}(f) \geq -k_i$. Dann ist $\mathcal{L}(D)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Definiere damit $\ell(D) \coloneqq \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(D))$ als *Dimension* des Divisors D.

Proposition 4.1.4. *Sei $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ ein Divisor. Dann gilt*

$$\ell(D) \leq 1 + \deg(D_+),$$

insb. gilt $\ell(D) \leq 1 + \deg(D)$, falls D effektiv ist.

Lemma 4.1.5. *Sei $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ ein Divisor, $x \in X$. Dann gilt $\ell(D) \leq \ell(D - x) + 1$.*

Beweis des Lemmas. (nach (Mir95, Lem. V.3.15, S. 151)) Sei $(U, \alpha) \in \mathcal{A}$ eine Karte um x so, dass $\alpha(x) = 0$ und sei $V \coloneqq \mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathbb{C}$. Sei ferner $n \coloneqq -D(x)$ sowie $f \in \mathcal{L}(D)$. Dann ist $g \coloneqq f \circ \alpha$ meromorph auf V und die Laurententwicklung von g um 0 hat die Form

$$g(z) = a_n^{(f)} \cdot z^n + \sum_{k \geq n+1} a_k \cdot z^k.$$

Betrachte nun $\delta\colon \mathcal{L}(D) \to \mathbb{C}, f \mapsto a_n^{(f)}$. Dann ist $\delta \in (\mathcal{L}(D))^*$ ein Funktional und es gilt $\mathrm{Kern}(\delta) = \mathcal{L}(D - x)$ sowie $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Bild}(\delta)) \leq 1$, sodass die Behauptung folgt. □

[13] Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (Hau15, Kap. 6), (Mir95, Kap. V.3, S. 147ff.) und (Zac11, Abs. 4, S. 14ff.))

Beweis der Proposition. (nach (Mir95, Prop. V.3.16, S. 151)) Falls $D = 0$, so gilt $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}_X(X)$, insb. $\ell(D) = 1$ mit Proposition 3.1.7. Führe nun einen Induktionsbeweis über $d := \deg(D_+)$. Für den Fall „$d = 0$" bemerken wir $D_+ = 0$ sowie $\mathcal{L}(D) \leq_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_+)$, also

$$\ell(D) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(D)) \leq \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(D_+)) = 1$$

wie gewünscht. Für „$d - 1 \to d$" (also $d \geq 1$) gibt es ein $x \in X$ mit $D(x) \geq 1$. Dann gilt $(D - x)_+ = D_+ - x$ sowie $\deg((D - x)_+) = d - 1$. Mit der Induktionsvoraussetzung und dem Lemma 4.1.5 sehen wir dann

$$\ell(D) \leq \ell(D - p) + 1 \overset{\text{IV}}{\leq} 1 + (d - 1) + 1 = 1 + d = 1 + \deg(D_+).$$

□

Satz 4.1.6. *Für eine kompakte Riemannsche Fläche X gilt* $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(X)) = 1$.

Lemma 4.1.7. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf X.*

Beweis des Lemmas. (For77, Satz II.16.11, S. 120) □

Beweis des Satzes. (nach (Zac11, Satz 6, S. 16)) Mit Lemma 4.1.7 erhalten wir bereits „$\geq$", denn $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen. Zeige also nur noch „$\leq$": Ang. es gäbe $f, g \in \mathcal{M}(X)$, die algebraisch unabhängig sind. Jetzt betrachte den effektiven Divisor

$$D := -\operatorname{div}_\infty(f) - \operatorname{div}_\infty(g) \in \operatorname{WDiv}(X).$$

Dann gilt konstruktionsgemäß $f, g \in \mathcal{L}(D)$. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $i + j \leq n$ liegen dann aber auch $f^i \cdot g^j \in \mathcal{L}(n \cdot D)$. Da f und g algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$ sind, muss $\{f^i \cdot g^j\}$ insb. linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sein, d. h. es gilt

$$\ell(n \cdot D) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(n \cdot D)) \geq \# \left\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0};\, i + j \leq n\right\} = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}.$$

Ferner muss aber mit Proposition 4.1.4 gelten $\ell(n \cdot D) \leq 1 + \deg(n \cdot D) = 1 + n \cdot \deg(D)$, sodass wir schließen können

$$1 = \frac{\ell(n \cdot D)}{\ell(n \cdot D)} \leq \frac{2 + 2n \cdot \deg(D)}{n^2 + 3n + 2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. □

Bemerkung 4.1.8. In (For77, Cor. II.16.12, S. 120) haben wir als Folgerung aus dem Satz von Riemann-Roch sogar eine noch stärkere Behauptung: Für eine kompakte Riemannsche Fläche X gibt eine Zahl $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ so, dass es einen n-blättrigen Morphismus $\varphi\colon X \to \mathbb{P}_1$ gibt. Mit Proposition 3.3.10 schließen wir

$$[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(\varphi^\flat(T))] = [\mathcal{M}(X) : \varphi^\flat(\mathcal{M}(\mathbb{P}_1))] \leq n.$$

Folgerung 4.1.9. *Wir haben einen kontravarianten Funktor*

$$\begin{aligned} [\textit{Kompakte Riemannsche Flächen}] &\longrightarrow [\textit{1-Erweiterungen über } \mathbb{C}], \\ X &\mapsto \mathcal{M}(X), \\ \varphi &\mapsto \varphi^\flat. \end{aligned}$$

Für eine kompakte Riemannsche Fläche gibt es ferner $g, h \in \mathcal{M}(X)$ so, dass $\mathcal{M}(X) \cong \mathbb{C}(g, h)$ gilt, d. h. es gibt $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit

$$\mathcal{M}(X) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}(g) \cdot h^i.$$

Beweis. Der Zusatz ergibt sich mit $g := \varphi^\flat(T)$ und dem Satz vom primitiven Element unmittelbar. □

4.2. Riemannsche Flächen aus projektiven Kurven.

Definition 4.2.1. Eine projektive Kurve X heißt *eben*, wenn es eine (zariski-)abgeschlossene Teilmenge $X' \subseteq \mathbb{P}_2$ gibt mit $X \cong X'$.

Proposition 4.2.2. *Sei X eine ebene projektive Kurve. Dann gibt es ein $f \in \mathbb{K}[T_0, T_1, T_2]$ homogen mit $X \cong V_{\mathbb{P}_2}(f)$.*

Beweis. Zunächst gibt es ein $X' \subseteq \mathbb{P}_2$ mit $X \cong X'$. Klarerweise ist auch der affine Kegel $C(X') \subseteq \mathbb{K}^3$ irreduzibel und es gilt $\dim(C(X')) = 2$. Aus der KOMMUTATIVEN ALGEBRA wissen wir, dass es ein $f \in \mathbb{K}[T_0, T_1, T_2]$ gibt so, dass $C(X') = V_{\mathbb{K}^3}(f)$. Dann gilt aber auch $X' = V_{\mathbb{P}_2}(f)$ wie gewünscht. □

Konstruktion 4.2.3.

(i) Auf dem $\mathbb{C}^n$ ist durch die Boreltopologie auf $\mathbb{R}^{2n}$ eine Topologie gegeben, die wir *komplexe Topologie* $\Omega_\mathbb{C}$ nennen.

(ii) Auf dem $\mathbb{P}_n$ ist durch die Quotiententopologie durch

$$\pi_n \colon W_n \to \mathbb{P}_n, (z_0, \ldots, z_n) \mapsto [z_0, \ldots, z_n]$$

bzgl. $(\mathbb{C}^n, \Omega_\mathbb{C})$ eine Topologie gegeben, die wir *komplexe Topologie* $\Omega_\mathbb{C}$ nennen.

(iii) Sei X eine ebene projektive Kurve, d. h. $X \cong V_{\mathbb{P}_2}(f)$. Dann ist durch die Teilraumtopologie von $(\mathbb{P}_2, \Omega_\mathbb{C})$ eine Topologie auf X gegeben, die wir *komplexe Topologie* $\Omega_\mathbb{C}$ nennen.

Proposition 4.2.4. *Für die komplexe Topologie gilt:*

(i) *In allen betrachteten Fällen ist die komplexe Topologie feiner als die Zariski-Topologie.*
(ii) *Die affinen Überdeckungen $\mathfrak{A}_i \colon (\mathbb{P}_n^i, \Omega_\mathbb{C}) \to (\mathbb{C}^n, \Omega_\mathbb{C})$ sind komplexe Homöomorphismen.*
(iii) *$(\mathbb{P}_n, \Omega_\mathbb{C})$ ist kompakt und genügt dem 2. Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Zu „(i)“. Auf $(\mathbb{C}^n, \Omega_\mathbb{C})$ muss lediglich gezeigt werden, dass alle $V_{\mathbb{C}^n}(f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathbb{C}^n$ komplex-abgeschlossen sind. Dies ergibt sich aber unmittelbar aus der Tatsache, dass $\{0\} \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und $f_i \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ als Polynom komplex-stetig ist.

Die Aussage ist auch für $\mathbb{P}_n$ klar, denn beide Topologien werden als Quotiententopologien durch die gleiche Projektion $\pi \colon W_n \to \mathbb{P}_n$ gebildet.

Zu „(ii)“: Es genügt, $i = 0$ zu betrachten. Betrachte hierzu die offensichtlich stetige Abbildung $\Phi \colon \pi_n^{-1}(\mathbb{P}_n^0) = \mathbb{C}_{T_0}^{n+1} \to \mathbb{C}^n, z \mapsto (z_1 z_0^{-1}, \ldots, z_n z_0^{-1})$. Dann haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \pi_n^{-1}(\mathbb{P}_n^0) \arrow[d, "\pi_n"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ \mathbb{P}_n^0 \arrow[r, "\mathfrak{A}_0"'] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

Für $V \subseteq \mathbb{C}^n$ komplex-offen erhalten wir nun $\pi_n^{-1}(\mathfrak{A}_0^{-1}(V)) = \Phi^{-1}(V) \subseteq \pi_n^{-1}(\mathbb{P}_n^0) \subseteq W_n$ offen, d. h. nach Definition der Quotiententopologie ist $\mathfrak{A}_0^{-1}(V) \subseteq \mathbb{P}_n$ offen und insg. $\mathfrak{A}_0$ stetig. Umgekehrt betrachte die stetige Abbildung $\Psi \colon \mathbb{C}^n \to \pi_n^{-1}(\mathbb{P}_n^0), z \mapsto (1, z)$. Dann haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \pi_n^{-1}(\mathbb{P}_n^0) \arrow[d, "\pi_n"'] & \\ \mathbb{P}_2^0 & \mathbb{C}^2 \arrow[l, "\mathfrak{A}_0^{-1}"] \arrow[ul, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

Für $U \subseteq \mathbb{P}_n^0$ komplex-offen ist dann auch $U' \coloneqq \pi_n^{-1}(U) \subseteq \pi_n^{-1}(\mathbb{P}_n^0) \subseteq W_n$ offen, und wir erhalten $\mathfrak{A}^{-1}(U) = \Psi^{-1}(U') \subseteq \mathbb{C}^n$ offen wie gewünscht.

Zu „(iii)“: Das 2. Abzählbarkeitsaxiom folgt mit 1.2.7 (ii) und 1.2.2 (i). Seien $z, w \in \mathbb{P}_n$. Wir können $\mathbb{P}_n$ nun wie in 2.1.8 affin überdecken. Œ gibt es $0 \leq i \leq n$ mit $z, w \in U_i$, etwa $i = 0$.

Betrachte jetzt $\mathfrak{A}_0(z), \mathfrak{A}_0(w) \in \mathbb{C}^n$. Da $\mathbb{C}^n$ mit der komplexen Topologie hausdorffsch ist, finden sich hier trennende Umgebungen $U_z, U_w \subseteq \mathbb{C}^n$. Damit erfüllen $\mathfrak{A}_0^{-1}(U_z)$ und $\mathfrak{A}_0^{-1}(U_w)$ die gewünschten Eigenschaften und $\mathbb{P}_n$ ist hausdorffsch.

Zur Quasikompaktheit: Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung des $\mathbb{P}_n$. Dann ist $\{\pi_n^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von W_n. Betrachte ferner $\partial B_1(0) \coloneqq \{z \in \mathbb{C}^{n+1};\ \|z\| = 1\}$ für eine Norm $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}_0^+$ und $V_i \coloneqq \pi_n^{-1}(U_i) \cap \partial B_1(0)$. Dann ist $\{V_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\partial B_1(0)$ und mit der Kompaktheit von $\partial B_1(0)$ erhalten wir eine offene Teilüberdeckung $\{V_{i_j}\}_{j=1}^r$ von $\partial B_1(0)$. Da aber $\pi_n \restriction_{\partial B_1(0)}$ bereits surjektiv ist, ist auf diese Weise $\{U_{i_j}\}_{j=1}^r$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathbb{P}_n$. $\square$

Proposition 4.2.5 (Ebene nichtsinguläre projektiven Kurven als Riemannsche Flächen)**.** *Sei X eine nichtsinguläre ebene projektive Kurve über $\mathbb{C}$ mit der komplexen Topologie. Dann gilt:*

(i) *X ist kompakt und zusammenhängend und genügt dem 2. Abzählbarkeitsaxiom.*
(ii) *Es gibt eine komplexe Struktur auf X so, dass X eine kompakte Riemannsche Fläche wird.*

Beweis. Betrachte $X = V_{\mathbb{P}_2}(f)$. Dann folgt die Hausdorff-Eigenschaft sowie das 2. Abzählbarkeitsaxiom mit 1.2.2 (i) unmittelbar. Die Quasikompaktheit von X folgt nun mit 1.2.2 (iv) und der Tatsache, dass $X \subseteq \mathbb{P}_2$ zariski- und mit Aussage (i) auch komplex-abgeschlossen ist. Für den Zusammenhang siehe (Hit09, Prop. 21, S. 45).

Wir können annehmen, dass $X = V_{\mathbb{P}_2}(f) \subseteq \mathbb{P}_2$ für $f \in \mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]$ homogen gilt. Sei nun $x \in X$. Œ sei $x \in X^0$. Betrachte jetzt $z \coloneqq \mathfrak{A}_0(x) \in X_0 = V_{\mathbb{C}^2}(f_{(0)}) \subseteq \mathbb{C}^2$.

Da X nichtsingulär ist, ist mit Erinnerung 2.3.5 und der Tatsache, dass $\mathrm{Char}(\mathbb{C}) = 0$ gilt, auch $g \coloneqq f_{(0)} \in \mathbb{C}[T_1, T_2]$ regulär in z, d. h. das Differential $\mathrm{d}g|_z \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ist surjektiv. Œ sei $\partial_2 g(z) \neq 0$. Mit dem Satz der IMPLIZITEN FUNKTION gibt es komplex-offene Umgebungen $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit $z_i \in W_i$ sowie eine holomorphe Abbildung $\psi \colon W_1 \to W_2$ so, dass

$$V \coloneqq X_0 \cap (W_1 \times W_2) = \{(w, \psi(w));\ w \in W_1\}$$

gilt. Folglich ist für $\beta \colon W_1 \subseteq \mathbb{C} \to V, w \mapsto (w, \psi(w))$ und die offene Umgebung $U \coloneqq \mathfrak{A}_0^{-1}(V) \subseteq X$ die Abbildung $\alpha \coloneqq (\beta^{-1} \circ \mathfrak{A}_0) \restriction_U \colon U \to W_1$ eine komplexe Karte für X um x. Dass Karten, die auf diese Weise konstruiert werden biholomorph verträglich sind, folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $\mathfrak{A}_i^{-1} \circ \mathfrak{A}_j$ auf $\mathbb{K}^n_{T_j}$ glatt ist. $\square$

4.3. **Die Kategorienäquivalenz**[14]**.**

Proposition 4.3.1. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gibt es $g, h \in \mathcal{M}(X)$ mit $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(g, h)$. Weiter gibt es $f \in \mathbb{C}[T_1, T_2]$ mit:*

(i) $f(g, h) = 0$.
(ii) *$V_{\mathbb{P}_2}(f^{(0)})$ ist nichtsingulär und projektiv, i. e. irreduzibel.*
(iii) *Es gilt $V_{\mathbb{P}_2}(f^{(0)}) \cong X$ als Riemannsche Fläche.*

Der Isomorphismus ist gegeben als die Fortsetzung des Isomorphismus

$$\varphi \colon X \setminus (A(g) \cup A(h)) \to V_{\mathbb{C}^2}(f), x \mapsto (g(x), h(x))$$

auf ganz X in $\mathbb{P}_2$.

Lemma 4.3.2. *Seien X und Y kompakte Riemannsche Flächen, $U \subseteq X$ offen mit $X \setminus U$ endlich und $V \subseteq Y$ offen mit $Y \setminus V$ endlich sowie ein biholomorphe Abbildung $\varphi \colon U \to V$ gegeben. Dann gibt es eine biholomorphe Fortsetzung $\overline{\varphi} \colon X \to Y$.*

Beweis des Lemmas. Siehe (Fre14, Folg. aus Satz I.3.8, S. 44) $\square$

Beweis der Behauptung. Die Existenz von $g, h \in \mathcal{M}(X)$ mit $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(g, h)$ ist bereits mit Folgerung 4.1.9 klar. Die Existenz eines $f \in \mathbb{C}[T_1, T_2]$ ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass g und h wegen $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(X)) = 1$ algebraisch abhängig sind.

Dass f auch den Eigenschaften aus „(ii)“ genügt, wird in (Fre14, S. 205) ausgeführt.

[14] Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (Fre14, Kap. IV.2, S. 198ff.).

Zu „(iii)“: Klarerweise sind $A(g) \cup A(h)$ und $V_{\mathbb{P}_2}(f^{(0)}) \setminus \mathfrak{A}_0^{-1}(V_{\mathbb{C}^2}(f)) = V_{\mathbb{P}_2}(f^{(0)}, T_0)$ endlich. In (Fre14, S. 205) wird ausgeführt, wie durch weitere Einschränkung von Definitions- und Wertebereich von φ auf das Komplement einer endlichen Menge Biholomorphie erreicht werden kann. Nun folgt die Aussage mit dem Lemma. □

Proposition 4.3.3. *Sei $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{L}$ eine 1-Erweiterung. Dann gibt es eine kompakte Riemannsche Fläche X mit $\mathcal{M}(X) = \mathbb{L}$.*

Beweis. Wieder ist mit dem Satz vom PRIMITIVEN ELEMENT klar

$$\mathbb{L} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}(g) \cdot h^i$$

mit $g \in \mathbb{L}$ transzendent und $h \in \mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{C}(g)$. Wie in 4.3.1 findet man nun ein geeignetes $f \in \mathbb{C}[T_1, T_2]$ so, dass $X \coloneqq V_{\mathbb{P}_2}(f^{(0)})$ die gewünschte Riemannsche Fläche ist. □

Proposition 4.3.4. *Seien X und Y zwei kompakte Riemannsche Flächen. Und sei $\psi\colon \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ ein $\mathbb{C}$-Homomorphismus. Dann gibt es genau eine holomorphe nichtkonstante Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ mit $\psi = \varphi^\flat$. Insb. haben wir eine Bijektion*

$$\mathrm{Hol}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(Y), \mathcal{M}(X)), \varphi \mapsto \varphi^\flat.$$

Beweis. (nach (Fre14, Satz IV.2.12, S. 207f.)) Wähle $g_1 \in \mathcal{M}(Y)$ nichtkonstant und setze $g_2 \coloneqq \psi(g_1)$. Dann sind beide g_k transzendent über $\mathbb{C}$ und es gibt $h_1 \in \mathcal{M}(Y)$, $h_2 \in \mathcal{M}(Y)$ sowie $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit

$$\mathcal{M}(Y) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}(g_1) \cdot h_1^i \quad \text{und} \quad \mathcal{M}(X) = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{C}(g_2) \cdot h_2^j.$$

Folglich gibt es $c_1 \ldots, c_s \in \mathbb{C}(T)$ so, dass

$$\psi(h_1) = \sum_{j=1}^{s} c_j(g_2) \cdot h_2^j$$

gilt. Durch Multiplikation von h_2 mit geeigneten Faktoren können wir Œ annehmen $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{C}[T]$. Weiter gibt es $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[T_1, T_2]$ mit $f_i(g_i, h_i) = 0$. Beachte hierbei, dass $X \cong V_{\mathbb{P}_2}(f_2^{(0)})$ und $Y \cong V_{\mathbb{P}_2}(f_1^{(0)})$ gilt. Betrachte nun die affinen Varietäten $Z_i \coloneqq V_{\mathbb{C}^2}(f_i)$. Dann ist

$$\Phi\colon Z_2 \to Z_1, (z, w) \mapsto \left(z, \sum_{j=1}^{s} c_j(z) \cdot w^j\right)$$

ein Morphismus und wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X & \supseteq & Z_2 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & Z_1 \arrow[dl, "\pi_1"] & \subseteq & Y \\ & & & \mathbb{C} & & & \end{tikzcd}$$

Betrachtet man, wie etwa in (Fre14, Satz IV.2.12, S. 208), die Verzweigungspunkte von Φ, so schließt man mit dem RIEMANNSCHEN HEBBARKEITSSATZ auf eine eindeutige Fortsetzung φ von Φ auf ganz X, sodass die Behauptung folgt. □

Satz 4.3.5 (Dritter Äquivalenzsatz)**.** *Der Funktor aus Folgerung 4.1.9 (i) ist wesentlich surjektiv und volltreu, insb. sind folgende drei Kategorien äquivalent:*

(i) *Nichtsinguläre projektive Kurven über $\mathbb{C}$ mit dominanten Morphismen.*
(ii) *1-Erweiterungen über $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{C}$-Homomorphismen.*
(iii) *Kompakte Riemannsche Flächen mit nichtkonstanten Morphismen.*

Beweis. Ergibt sich nun unmittelbar aus der Vorarbeit. □

Ausblick 4.3.6. Man kann zeigen, dass für eine ebene nichtsinguläre projektive Kurve X der Körper der rationalen Funktionen mit dem der meromorphen Funktionen übereinstimmt, also $\mathbb{C}(X) = \mathcal{M}(X)$. Man rechnet weiter, dass in diesem Falle auch die Bewertungsbegriffe ord_x und ord^x übereinstimmen.

5. Tori und elliptische Kurven

5.1. Tori und doppeltperiodische Funktionen[15].

Konstruktion 5.1.1 (Torus)**.** Seien $a, b \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Dann ist

$$\Gamma \coloneqq \Gamma(a, b) \coloneqq a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$$

das von a und b erzeugte *Gitter*. Γ ist ein $\mathbb{Z}$-Untermodul von $(\mathbb{C}, +)$, nenne den Quotientenmodul $\mathbb{C}/\Gamma$ zusammen mit der kanonischen Quotiententopologie *Torus*.

Proposition 5.1.2. *Sei $\Gamma \coloneqq \Gamma(a, b)$ wie oben. Dann gilt:*

(i) *Es gilt $\mathbb{C}/\Gamma \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^2$.*
(ii) *$\mathbb{C}/\Gamma$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche.*
(iii) *Für $\lambda \in \mathbb{C}^*$ und $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $z + \Gamma = w + \Gamma \Leftrightarrow \lambda z + \lambda\Gamma = \lambda w + \lambda\Gamma$.*

Beweis. Zu „(i)“: Offensichtlich gilt $\mathbb{C}/\Gamma \cong \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/b\mathbb{Z}$. Es genügt also, exemplarisch zu zeigen, dass $\mathbb{R}/a\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$ gilt. Betrachte hierfür

$$\Phi\colon \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1, x + a\mathbb{Z} \mapsto \exp(2\pi i x a^{-1}).$$

Zunächst bemerken wir, dass Φ wohldefiniert ist, denn für $x + a\mathbb{Z} = x' + a\mathbb{Z}$ gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $x' = x + ak$, also

$$\Phi(x' + a\mathbb{Z}) = \exp(2\pi i x' a^{-1}) = \exp(2\pi i k) \cdot \exp(2\pi i x a^{-1}) = \Phi(x + a\mathbb{Z}).$$

Ferner bemerken wir, dass Φ ein Gruppenhomomorphismus zwischen $(\mathbb{C}/\Gamma, +)$ und $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \cdot)$ ist. Hierbei gilt $\operatorname{Kern}(\Phi) = \{a\mathbb{Z}\}$, sodass Φ injektiv ist. Die Surjektivität ist unmittelbar klar.

Ferner ist $\Phi \circ \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ für $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/a\mathbb{Z}, x \mapsto x + a\mathbb{Z}$ borelstetig, d. h. für $U \subseteq \mathbb{S}^1$ offen gilt $\sigma^{-1}(\Phi^{-1}(U))$ offen. Nach Definiton der Quotiententopologie folgt unmittelbar $\Phi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ offen. Die Stetigkeit von Φ^{-1} folgt aus der Tatsache, dass Φ eine offene Abbildung ist.

Zu „(ii)“: Wegen (i) ist $\mathbb{C}/\Gamma$ hausdorffsch, kompakt und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Betrachte nun die kanonische Projektion $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma, z \mapsto z + \Gamma$. Für $z + \Gamma \in \mathbb{C}/\Gamma$ ist $\pi\restriction_{B_\varepsilon(z)}$ für $0 < \varepsilon \leq 2^{-1} \cdot \min(a, b)$ injektiv, sodass

$$\varphi_z\colon U_Z \coloneqq \pi(B_\varepsilon(z)) \to B_\varepsilon(z), w + \Gamma \mapsto \left(\pi\restriction_{B_\varepsilon(z)}\right)^{-1}(w + \Gamma)$$

ein Homöomorphismus um $z + \Gamma$ ist. Klarerweise ist $\mathcal{A} \coloneqq \{(U_z, \varphi_z);\ z \in \mathbb{C}\}$ ein Atlas für $\mathbb{C}/\Gamma$. Für zwei Karten $(U_z, \varphi_z), (U_w, \varphi_w) \in \mathcal{A}$ gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\varphi_z \circ \varphi_w^{-1}(v) = v + ak + bl$$

für alle $v \in \varphi_w(U_z \cap U_w)$ gilt, insb. ist der Kartenwechsel biholomorph, sodass $\mathbb{C}/\Gamma$ zur Riemannschen Fläche wird.

Zu „(iii)“: Hier genügt es, eine Richtung betrachten, da die andere Richtung analog mit $1/\lambda$ folgt. Sei also $z + \Gamma = w + \Gamma$, d. h. es gibt $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $z - w = ka + lb$. Dann gilt $\lambda z - \lambda w = \lambda(ka + lb) = k \cdot (\lambda a) + l \cdot (\lambda b) \in \lambda\Gamma$. ☐

Definition 5.1.3. Sei $\Gamma \coloneqq \Gamma(a, b)$ ein Gitter.

(i) Eine meromorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ heißt Γ-*elliptisch* oder *doppeltperiodisch bzgl.* Γ, falls $f(z) = f(z')$ für alle $z - z' \in \Gamma$ gilt. Sei $\operatorname{Ell}(\Gamma)$ die Menge dieser Funktionen.
(ii) Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann heißt $P_z \coloneqq \{z + ka + lb;\ 0 \leq k, l < 1\}$ *Fundamentalparallelogramm*, d. h. P ist ein beschränktes Repräsentantensystem für $\mathbb{C}/\Gamma$.

[15] Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (Lan99, Kap. XIV.1, S. 391ff.).

Bemerkung 5.1.4. Sei $\Gamma \coloneqq \Gamma(a,b)$ ein Gitter. Dann ist

$$\Phi_\Gamma \colon \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma) \to \mathrm{Ell}(\Gamma), f \mapsto [z \mapsto f(z+\Gamma)]$$

ist ein Isomorphismus von Körpern.

Proposition 5.1.5. *Sei Γ ein Gitter, P ein Fundamentalparallelogramm und f Γ-elliptisch.*

(i) *Ist f ganz, so ist f konstant.*

(ii) *Falls $A(f) \cap \partial P = \emptyset$, so gilt*

$$\sum_{z \in A(f) \cap P} \mathrm{Res}(f,z) = 0,$$

insb. hat f wenigstens zwei Pole (mit Vielfachheiten), falls f nichtkonstant ist.

(iii) *Falls $S(f) \cap \partial P = \emptyset$, so gilt*

$$\sum_{z \in S(f) \cap P} \mathrm{ord}_z(f) = 0 \quad \textit{und} \quad \sum_{z \in S(f) \cap P} z \cdot \mathrm{ord}_z(f) \in \Gamma,$$

insb. hat jede nichtkonstante Γ-elliptische Funktion wenigstens eine Nullstelle.

Beweis. (nach (Lan99, Thm. XIV.1.1/XIV.1.2, S. 393ff.)) Für „(i)“ sehen wir

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} f(z) = \sup_{z \in P} f(z) \leq \sup_{z \in \overline{P}} f(z) < \infty,$$

denn $\overline{P}$ ist kompakt. Nun folgt die Behauptung mit dem Satz von Liouville.

Zu „(ii)“: Mit dem Residuensatz ist klar, dass

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \sum_{z \in A(f) \cap P} \mathrm{Res}(f,z) &= \int_{\partial P} f(w) \,\mathrm{d}w \\ &= \left(\int_z^{z+a} + \int_{z+e_1}^{z+a+b} + \int_{z+a+b}^{z+b} + \int_{z+b}^{z} \right) f(w) \,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

gilt. Hierbei sehen wir aber, da f Γ-elliptisch ist,

$$\int_z^{z+a} f(w) \,\mathrm{d}w = \int_z^{z+a} f(w+b) \,\mathrm{d}w = \int_{z+b}^{z+a+b} f(w) \,\mathrm{d}w = -\int_{z+a+b}^{z+b} f(w) \,\mathrm{d}w$$

und analog auch für die beiden anderen Summanden, sodass die Behauptung folgt. Zu „(iii)“: Hier sehen wir wieder mit dem Residuensatz

$$2\pi i \cdot \sum_{z \in S(f) \cap P} \nu(z) = \int_{\partial P} \frac{f'(w)}{f(w)} \,\mathrm{d}w = 0,$$

wobei der letzte Schritt das gleiche Argument wie in (i) ausnutzt. Weiter gilt

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \sum_{z \in S(f) \cap P} z \cdot \mathrm{ord}_z(f) &= \int_{\partial P} \frac{w \cdot f'(w)}{f(w)} \,\mathrm{d}w \\ &= \left(\int_z^{z+a} + \int_{z+a}^{z+a+b} + \int_{z+a+b}^{z+b} + \int_{z+b}^{z} \right) \frac{w \cdot f'(w)}{f(w)} \,\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Wir sehen hierbei

$$\int_z^{z+a} \frac{w \cdot f'(w)}{f(w)} \,\mathrm{d}w - \int_{z+b}^{z+a+b} \frac{w \cdot f'(w)}{f(w)} \,\mathrm{d}w = -b \cdot \int_z^{z+a} \frac{f'(w)}{f(w)} \,\mathrm{d}w \in 2\pi i b \mathbb{Z}.$$

Analog für die anderen beiden Summanden, sodass die Behauptung direkt folgt. $\square$

5.2. **Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion[16]].**

Vereinbarung 5.2.1. Sei im Folgenden stets $\Gamma \coloneqq \Gamma(a,b)$ ein Gitter.

Proposition 5.2.2. *Für $\alpha > 2$ konvergiert die Reihe*

$$s_\alpha \coloneqq \sum_{v\in\Gamma^*} \frac{1}{v^\alpha}$$

absolut und die Koeffizienten sind wohldefiniert.

Beweis. (nach (Lan99, Lem. 2.1, S. 395f.)) Betrachte $A_n \coloneqq \{z \in \mathbb{C};\ n-1 \leq |z| < n\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sowie $d \geq \operatorname{diam}(P)$, wobei wir das spezielle Fundamentalparallelogramm $P \coloneqq \{ka+lb;\ 0 \leq k,l < 1\}$ betrachten. Sei nun $B_n \coloneqq \{z \in \mathbb{C};\ n-1-d \leq |z| \leq n+d\}$ Klarerweise gilt $A_n \subseteq B_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Betrachte jetzt $I_n \coloneqq \Gamma^* \cap A_n$. Dann gilt konstruktionsgemäß

$$\dot{\bigcup_{v\in I_n}} (v+P) \subseteq B_n.$$

Mit dem Lebesgue-Maß λ^2 auf $\mathbb{C}$ schließen wir

$$\#I_n \cdot \lambda^2(P) \leq \lambda^2(B_n) \leq \pi \cdot \left((n+d)^2 - (n-1-d)^2\right) \leq \overline{C} \cdot n,$$

wobei $\overline{C} \in \mathbb{R}$ (unabhängig von n) geeignet gewählt wird. Betrachte jetzt $C \coloneqq \overline{C} \cdot (\lambda^2(P))^{-1} \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt $\#(\Gamma^* \cap A_n) \leq C \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, also

$$\sum_{v\in\Gamma^*} \frac{1}{|v|^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v\in I_n} \frac{1}{|v|^\alpha} \leq C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^\alpha} = C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} < \infty.$$

□

Konstruktion 5.2.3. Für $\Gamma^* \coloneqq \Gamma \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ heißt

$$\wp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty, z \mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{v\in\Gamma^*} \left(\frac{1}{(z-v)^2} - \frac{1}{v^2}\right)$$

Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Es gilt $A(\wp) = \Gamma$.

Beweis. Sei $z \notin \Gamma$ und $v \in \Gamma^*$. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{(z-v)^2} - \frac{1}{v^2}\right| = \frac{|2zv - z^2|}{|z-v|^2 \cdot |v|^2} \leq \frac{2 \cdot |z| \cdot |v| + |z|^2}{|v|^4 - 2 \cdot |z| \cdot |v|^3 + |z|^2 \cdot |v|^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|v|^3}\right),$$

sodass die Behauptung mit Proposition 5.2.2 folgt. □

Proposition 5.2.4. *Für alle $z \notin \Gamma$ gilt*

$$\wp'(z) = -2 \cdot \sum_{v\in\Gamma} \frac{1}{(z-v)^3},$$

insb. ist $\wp$ Γ-elliptisch.

Beweis. Den Term für $\wp'$ erhält man direkt durch gliedweises Differenzieren in allen Regularitätsstellen. Klarerweise ist $\wp'$ Γ-elliptisch. Da $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ wegzusammenhängend ist, gibt es dadurch $C \in \mathbb{C}$ mit $\wp(z+a) = \wp(z) + C$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Klarerweise gilt aber auch $\wp(z) = \wp(-z)$. Folglich gilt

$$C = \wp\left(\frac{a}{2}\right) - \wp\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$$

und analog für $\wp(z+b)$, sodass insg. $\wp$ Γ-elliptisch ist. □

Proposition 5.2.5. *Es gilt $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$.*

[16] Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (Lan99, Kap. XIV.2, S. 395).

Lemma 5.2.6.

(i) *Sei f Γ-elliptisch und gerade und sei $u \in \mathbb{C}$. Dann gilt* $\operatorname{ord}_u(f) = \operatorname{ord}_{-u}(f)$.

(ii) *Sei $u \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ sowie $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty, z \mapsto \wp(z) - \wp(u)$. Dann gilt:*

(a) *Falls $2u \in \Gamma$, so gilt* $\operatorname{ord}_u(g) = 2$ *und* $\{g = 0\} = u + \Gamma$.

(b) *Falls $2u \notin \Gamma$, so gilt* $\operatorname{ord}_u(g) = \operatorname{ord}_{-u}(g) = 1$ *und* $\{g = 0\} = \pm u + \Gamma$.

(iii) *Für f Γ-elliptisch und gerade sowie $u \in \mathbb{C}$ mit $u+\Gamma = -u+\Gamma$ mit $f(u) = 0$ gilt* $\operatorname{ord}_u(f) \in 2\mathbb{Z}$.

Beweis des Lemmas. Zu „(i)“: Da f gerade ist, gilt

$$[f(-u)]^{(k)} = (-1)^k \cdot f^{(k)}(u),$$

sodass die Behauptung folgt. Zu „(ii)“: Im Falle „(a)“ bemerken wir, dass f' ungerade ist und folglich gilt $f'(u) = -f'(-u)$, jedoch zusätzlich $f'(u) = f'(-u)$, denn $u + \Gamma = -u + \Gamma$. Folglich gilt $f'(u) = 0$ und $\operatorname{ord}_u(g) \geq 2$. Ferner hat aber $\wp$ nur eine Pol auf $\mathbb{C}/\Gamma$ und dieser hat Ordnung 2. Mit Proposition 5.1.5 (iii) folgt $\operatorname{ord}_u(g) = 2$ und auch, dass dies die einzigen Nullstellen sind. Im Falle „(b)“ sehen wir mit (i), dass $g(u) = g(-u) = 0$ gelten muss. Wieder mit Proposition 5.1.5 (iii) folgt die Behauptung.

Zu „(iii)“: Wie bereits in (ii) folgt $\operatorname{ord}_u(f) \geq 2$. Für $u \notin \Gamma$ betrachte

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty, z \mapsto \wp(z) - \wp(u).$$

Dann gilt $g(u) = 0$ und mit den obigen Überlegungen $\operatorname{ord}_u(g) \geq 2$. und $g \restriction_{\mathbb{C}\setminus\{u+\Gamma\}} \neq 0$. Dann ist $f \cdot g^{-1}$ elliptisch, gerade und in u holomorph. Falls $f(u) \cdot g(u)^{-1} \neq 0$, dann galt bereits $\operatorname{ord}_u(f) = 2$, andernfalls gilt erneut $\operatorname{ord}_u(fg^{-1}) \geq 2$ und wir wiederholen unser Verfahren so lange, bis wir $\operatorname{ord}_u(f) = 2n$ erreichen. Falls $u \in \Gamma$, so betrachte

$$g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty, z \mapsto \frac{1}{\wp(z)}$$

und verfahre analog. $\square$

Beweis der Proposition. Klarerweise gilt „$\supseteq$“, denn $\wp, \wp' \in \operatorname{Ell}(\Gamma) = \mathcal{M}(C/\Gamma)$. Sei nun umgekehrt $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$. Dann gilt

$$f(z) = \underbrace{\frac{f(z) + f(-z)}{2}}_{=: f_1(z)} + \underbrace{\frac{f(z) - f(-z)}{2}}_{=: f_2(z)},$$

wobei f_1 eine gerade und f_2 eine ungerade Funktion ist. Es genügt also, die Behauptung für gerade und ungerade Funktionen zu zeigen. Da ferner $f_2 \cdot \wp'$ auch gerade ist, brauchen wir sogar nur gerade Γ-elliptische Funktionen betrachten.

Falls f konstant ist, so ist nichts zu zeigen. Sei $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_s\} \in \mathbb{C}$ ein Repräsentantensystem für $\{u+\Gamma;\ f(u) = 0\}$, wobei mit dem Identitätssatz 3.1.6 angewandt auf die kompakte Riemannsche Fläche $\mathbb{C}/\Gamma$ die Endlichkeit des Repräsentantensystems gewährleistet ist und mit Proposition 5.1.5 (iii) folgt, dass dieses nichtleer ist. Wähle nun eine Teilfamilie $\mathcal{F} \coloneqq \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq \{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_s\}$ so, dass für $1 \leq i \leq s$ gilt $\overline{u}_i \in \mathcal{F}$ genau dann, wenn $-\overline{u}_i \notin \mathcal{F}$. Setze nun

$$m_i \coloneqq \begin{cases} \operatorname{ord}_{u_i}(f) & \text{für } 2u_i \notin \Gamma, \\ 2^{-1} \cdot \operatorname{ord}_{u_i}(f) & \text{für } 2u_i \in \Gamma \end{cases}$$

und betrachte die Abbildung

$$g\colon z \mapsto \prod_{i=1}^{r} \left(\wp(z) - \wp(u_i)\right)^{m_i}.$$

Dann gilt $\operatorname{ord}_z(g) = \operatorname{ord}_z(f)$ für alle $z \notin \Gamma$ mit dem Lemma 5.2.6. Mit Proposition 5.1.5 (iii) angewandt auf ein Fundamentalparallelogramm P mit $0 \in P^\circ$ folgt auch $\operatorname{ord}_0(f) = \operatorname{ord}_0(g)$. Folglich hat fg^{-1} keine Singularitäten und ist mit Proposition 5.1.5 (i) konstant wie gewünscht. $\square$

Satz 5.2.7. *Die Laurent-Entwicklung von $\wp$ um 0 ist gegeben durch*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1) \cdot s_{2k+2} \cdot z^{2k}.$$

Für $g_2^\Gamma := 60s_4$ und $g_3^\Gamma := 140s_6$ gilt weiter $(\wp')^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3\wp = 0$, d. h. $\wp$ und $\wp'$ sind algebraisch abhängig über $\mathbb{C}$ und es gilt $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)) = 1$.

Beweis. Wir sehen mit der Geometrischen Reihenformel

$$\frac{1}{(z-v)^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{1}{(1-z/v)^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{v}\right)^2\right)^2,$$

sodass wir mit der Cauchyschen Reihenmultiplikationsformel schließen können

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{v\in\Gamma^*}\left[\frac{1}{v^2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{v}\right)^2\right)^2 - \frac{1}{v^2}\right] = \frac{1}{z^2} + \sum_{v\in\Gamma^*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{v^{k+2}} \cdot z^k.$$

Da diese Doppelreihe absolut konvergiert, können wir die Summationsreihenfolge mithilfe des Riemannschen Umordnungssatzes vertauschen und erhalten Laurentkoeffizienten

$$c_k := \begin{cases} \displaystyle\sum_{v\in\Gamma^*}\frac{k+1}{v^{k+2}}, & \text{für } k \geq 1 \\ 1 & \text{für } k = -2 \end{cases}$$

und $c_k := 0$ sonst. Dabei gilt offensichtlich $c_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1) \cdot s_{2k+2} \cdot z^{2k} \\ \text{und} \quad \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1) \cdot 2k \cdot s_{2k+2} \cdot z^{2k-1}. \end{aligned}$$

Betrachte nun $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty, z \mapsto \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) + g_3$. Konstruktionsgemäß gilt $A(\varphi) \subseteq \Gamma$ und φ ist Γ-elliptisch. Ausmultiplizieren der beiden Laurentreihen

$$\wp(z) = z^{-2} + 3s_4z^2 + 5s_6z^4 + \mathcal{O}(z^6) \quad \text{und} \quad \wp'(z) = -2z^{-3} + 6s_4 + 20s_6z^3 + \mathcal{O}(z^5)$$

zeigt $\varphi(0) = 0$ und φ ist ganz; insg. mit Proposition 5.1.5 (i) $\varphi \equiv 0$ und die Behauptung folgt. □

Folgerung 5.2.8. *$\wp$ hat in jedem $z \in \Gamma$ einen Pol der Ordnung 2 und $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \mathbb{C}(\wp) \oplus \wp' \cdot \mathbb{C}(\wp)$.*

5.3. **Elliptische Kurven**[17]**.**

Definition 5.3.1. Für $g := (g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2$ betrachte

$$f_g := T_2^2 - 4T_1^3 + g_2T_1 + g_3 \in \mathbb{C}[T_1, T_2].$$

Dann heißt die projektive Kurve $\mathcal{E}(g) := V_{\mathbb{P}_2}(f_g^{(0)}$ *elliptisch*, falls sie nichtsingulär ist. Dann heißt g *elliptisches Paar*.

Proposition 5.3.2. *Für $g := (g_2, g_3)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathcal{E}(g)$ ist eine elliptische Kurve, d. h. g ist ein elliptisches Paar.*
(ii) *$V(f_g)$ ist nichtsingulär.*
(iii) *$\Delta_g := g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, d. h. $4T_1^3 - g_2T_1 - g_3$ hat paarweise verschiedene Nullstellen.*

[17]Dieser Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an (Hul00, Kap. IV.3, S. 102ff.) und (Lan99, Kap. XIV.2, S. 395).

Beweis. (nach (Hul00, Satz IV.3.4, S. 105)) Sei im Folgenden $F \coloneqq f_g^{(0)}$. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ ist klar mit Erinnerung 2.3.5. Zu „(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Wir sehen

$$\begin{aligned}\partial_0 F &= T_2^2 - 2g_2T_0T_1 + 3g_3T_0^2,\\ \partial_1 F &= -12T_1^2 + g_2T_0^2,\\ \partial_2 F &= 2T_0T_2.\end{aligned}$$

Betrachte nun $x \in \mathcal{E}(g)$. Falls $x \in X^0$, also $x_0 \neq 0$, so gilt mit Erinnerung 2.3.5 bereits, dass X in x nichtsingulär ist. Falls $x_0 = 0$, so gilt $x_1 = 0$ und $x_2 \neq 0$, also $\partial_0 F(x) = -x_2^2 \neq 0$.

Zu „(i) $\Leftrightarrow$ (iii)“, zunächst „$\Leftarrow$“: Ang. es gibt $x \in \mathcal{E}(g)$ singulär. Dann sind alle partiellen Ableitungen 0, insb. $x_0 = 0$ oder $x_2 = 0$. Hierbei liefert $x_0 = 0$ wie bereits festgestellt einen nichtsingulären Punkt, d. h. die einzige Möglichkeit ist $x_2 = 0$ und $x_0 \neq 0$. Dann gilt

$$2g_2x_1 + 3g_3x_0 = 0 \quad \text{und} \quad -12x_1^2 + g_2x_0^2 = 0.$$

Wegen (ii) kann $g_2 = g_3 = 0$ nicht auftreten. Falls $g_3 = 0$ und $g_2 \neq 0$, so erhalten wir $x_1 = 0$ und $x = [1, 0, 0]$, im Widerspruch zur zweiten Gleichung. Falls $g_2 = 0$ und $g_3 \neq 0$, so erhalten wir $x_0 = 0$, was stets nichtsinguläre Punkte liefert.

Die einzige verbleibende Möglichkeit ist $g_2g_3 \neq 0$. Dann gilt bereits $x_1 \neq 0$ und wir erhalten

$$x_0 = -\frac{2g_2}{3g_3} \cdot x_1 \quad \text{sowie} \quad -12x_1^2 + \frac{4g_2^3}{9g_3^2} \cdot x_1^2 = 0,$$

sodass wir mit der letzten Gleichung sowie mit $x_1 \neq 0$ schließen können $4\Delta_g = -108g_3^2 + 4g_2^3 = 0$ und die Kontraposition folgt.

Für „$\Rightarrow$“ rechne man nun leicht nach, dass für $\Delta_g = 0$ entweder gelten muss $g_2 = g_3 = 0$ oder $g_2g_3 \neq 0$ und im ersten Fall $[1, 0, 0]$ singulär ist, im zweiten Fall die Lösungen oder unteren Gleichungen Singularitäten liefern. ☐

Proposition 5.3.3. *Für ein Gitter $\Gamma \coloneqq \Gamma(a, b)$ sowie $\omega_1 \coloneqq a/2$, $\omega_2 \coloneqq b/2$ und $\omega_3 \coloneqq \omega_1 + \omega_2$ gilt*

$$(\wp')^2 = 4 \cdot \prod_{k=1}^{3} (\wp - \wp(\omega_k)),$$

insb. gilt $\Delta_{g^\Gamma} \neq 0$ und $\mathcal{E}(g^\Gamma)$ für $g^\Gamma \coloneqq (g_2^\Gamma, g_3^\Gamma)$ ist eine elliptische Kurve.

Beweis. Betrachte $f = 4T^3 - g_2T - T \in \mathbb{C}[T]$. Dann gilt $(\wp')^2 = f(\wp)$ sowie $\deg(f) = 3$. Klarerweise gilt $\omega_k + \Gamma = -\omega_k + \Gamma$, d. h. $\wp'(\omega_k) = \wp'(-\omega_k)$ ergibt sich unmittelbar aus der Γ-Elliptizität von $\wp'$. Da $\wp'$ überdies noch ungerade ist, gilt aber auch $\wp'(\omega_k) = -\wp'(-\omega_k)$, insg. gilt also

$$f(\wp(\omega_k)) = (\wp')^2(\omega_k) = 0.$$

Es genügt, zu zeigen, dass die $\wp(\omega_k)$ paarweise verschieden sind. Hierfür betrachte $h_k(z) \coloneqq \wp(z) - \wp(\omega_k)$ und wende Lemma 5.2.6 (ii,a) an, denn hieraus ergibt sich direkt $h_k(\omega_l) \neq 0$ für $k \neq l$. ☐

Satz 5.3.4. *Die Abbildung*

$$\varphi\colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathcal{E}(g^\Gamma), z + \Gamma \mapsto \begin{cases} [1, \wp(z), \wp'(z)] & \text{für } z \notin \Gamma \\ [0, 0, 1] & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Isomorphismus kompakter Riemannscher Flächen.

Beweis. (nach (Raa10, Thm. 4, S. 9f.)) Dass $\mathcal{E}(g^\Gamma)$ eine kompakte Riemannsche Fläche ist, ist bereits nach Kapitel 4 klar. Um Bijektivität von φ zu zeigen, betrachte zunächst

$$\psi\colon \mathbb{C}/\Gamma \setminus \{\Gamma\} \to X \coloneqq V(T_2^2 - 4T_1^3 + g_2T_1 + g_3), z + \Gamma \mapsto (\wp(z), \wp'(z)),$$

denn im Nachhinein kann ohne Probleme $\varphi = \mathfrak{A}_0^{-1} \circ \psi$ betrachtet und das Paar $(\Gamma, [0, 0, 1])$ hinzugenommen werden. Nun zur Surjektivität: Sei $(p_1, p_2) \in X$. Dann hat $\wp - p_1$ wenigstens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ so, dass $\wp(z) = p_1$. Da $(p_1, p_2) \in X$, gilt $\wp'(z)^2 = p_2^2$, also $\wp'(z) = \pm p_2$.

Falls $\wp'(z) = p_2$, sind wir fertig, andernfalls ist $\wp(-z) = p_1$ und $\wp'(-z) = p_2$. Insgesamt folgt die Surjektivität.

Zur Injektivität: Betrachte $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ mit $\wp(z) = \wp(z')$ und $\wp'(z) = \wp'(z')$. Dann sind z und z' keine Pole. Betrachte nun $h := \wp - \wp(z)$. Wieder mit Lemma 5.2.6 (ii), diesmal beide Fälle sehen wir $z - z' \in \Gamma$ (Fall a) oder $z + z' \in \Gamma$ (Fall b). Im ersten Fall sind wir bereits fertig; im zweiten bemerken wir $\wp'(z) = -\wp'(z')$, also mit der Voraussetzung $\wp(z') = \wp'(z')$ schließen wir $\wp'(z) = 0$, was aber heißt $z = \omega_k$ für ein $k \in \{1, 2, 3\}$ und uns wieder auf den ersten Fall bringt. Insgesamt folgt die Injektivität.

Dass φ tatsächlich ein Isomorphismus von Riemannschen Flächen ist, ergibt sich nun unmittelbar aus der Tatsache, dass ψ als komponentenweise holomorphe Abbildung ein Isomorphismus ist und dieser dann mit Lemma 4.3.2 eindeutig zu φ fortgesetzt werden kann. □

Literatur

[AM69] Atiyah, Michael F. ; Macdonald, Ian G.: *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, 1969

[For77] Forster, Otto: *Riemannsche Flächen.* Berlin : Springer, 1977

[Fre14] Freitag, Eberhard: *Funktionentheorie 2.* Springer, 2014

[Har77] Hartshorne, Robin: *Algebraic Geometry.* New York : Springer, 1977 (Bd. 5)

[Har07] Hartl, Urs: *Kategorien und Funktoren.* `http://www.math.uni-muenster.de/u/urs.hartl/07so_AlgGeom/Kategori.pdf`, 2007. – Aufgerufen am 19. 03. 2015

[Hau15] Hausen, Jürgen: *Algebraische Geometrie.* Tübingen, 2015. – Skript zur Vorlesung

[Hit09] Hitchin, Nigel: *Algebraic Curves.* `http://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinnotes/algebraiccurves2009.pdf`, 2009. – Aufgerufen am 14. 04. 2015

[Hul00] Hulek, Klaus: *Elementare Algebraische Geometrie.* Brauschweig/Wiesbaden : Friedrich Vieweg & Sohn, 2000

[Lan99] Lang, Serge: *Complex Analysis.* Springer, 1999

[Mir95] Miranda, Rick: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* American Mathematical Society, 1995 (Bd. 5)

[Raa10] Raastad, Christopher: *Weierstrass $\wp$, and Elliptic Curves Over* $\mathbb{C}$. `http://interact.sagemath.org/edu/2010/414/projects/raastad.pdf`, 2010. – Aufgerufen am 26. 03. 2015

[Zac11] Zachhuber, Jonathan: *Riemannsche Flächen und Algebraische Geometrie.* `zachhuber@math.uni-frankfurt.de`, 2011

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ausschließlich mithilfe der angegebenen Quellen angefertigt habe.

Florian Kranhold,
Tübingen, der 28. Juli 2015