CdE-MusikAkademie 2024

Theorie der reinen Intonation

Skript™

Thomas Drögemüller Florian Kranhold

12. März 2024

In diesem Skript entwickeln wir die Grundlagen der reinen Intonation in der klassischen Musik und stellen eine System zum „Ausstimmen“ mehrstimmiger Musik vor. Unsere Herangehensweise ist dabei theoretisch; insbesondere wollen wir uns nicht auf ein Instrument mit einer endlichen Anzahl an Tönen beschränken. Dieser Aufsatz enthält mehrere Audiobeispiele, die für den Interpreter `lilypond` geschrieben sind.

1. Einleitung und Überblick

Wir setzen im Nachfolgenden einige Grundkonzepte klassischer Musiktheorie als bekannt voraus, z. B. Töne, Intervallnamen, diatonische Skalen, Akkorde, Tonarten und den Quintenzirkel. Dies wird im Wesentlichen von [4, § 1–6] abgedeckt.

Wenn ein Instrument (z. B. die menschliche Stimme) einen Ton erzeugt, schwingt ein „Material“ (z. B. eine Saite oder eine Luftsäule) mit einer gewissen Frequenz. Je höher die Frequenz ist, desto höher ist der Ton. Ein *Stimmungssystem* weist jeder Note eine Frequenz zu. Typischerweise beginnen wir mit der Fixierung des *Kammertons*, also der Frequenz des a′, heutzutage bei 440 Hz. Von dort aus leiten wir die anderen Tonhöhen wie folgt ab: Die einfachste Beziehung zwischen Tönen ist die der *Oktave*, die einem Frequenzverhältnis von $1 : 2$ entspricht, z. B. bekommt das a″ die Frequenz 880 Hz zugewiesen. In der heutzutage üblichen *gleichstufigen Stimmung* wird die Oktave in zwölf gleich große Schritte, genannt *gleichstufige Halbtöne*, aufgeteilt. Ein gleichstufiger Halbton entspricht also dem Frequenzverhältnis $1 : 2^{\frac{1}{12}}$. Mit diesem Verhältnis kann nun jedem Ton eine Frequenz zugewiesen werden; so wird etwa dem e″ sieben gleichstufige Halbtöne über dem a′ eine Frequenz von

$$440\,\mathrm{Hz} \cdot 2^{\frac{7}{12}} \approx 659{,}26\,\mathrm{Hz}$$

zugewiesen. An dieser Stelle könnte man erwarten, dass die Erzählung und damit auch dieses Skript ihr Ende haben. Allerdings stellt sich dieses Stimmungssystem als suboptimal heraus, sobald mehrere Töne gleichzeitig erklingen. Die Physik™ lehrt uns, dass mehrere Töne konsonieren, wenn ihre Frequenzen im Verhältnis kleiner, paarweise teilerfremder Ganzzahlen stehen,[1] z. B. 4 : 5 : 6 : 7. Sehen wir uns nun einen Durakkord mit kleiner Septime, bestehend aus Grundton, großer Terz, reiner Quinte und kleiner Septime, an: Da in gleichstufiger Stimmung eine große Terz aus 4, eine reine Quinte aus 7 und eine kleine Septime aus 10 gleichstufigen Halbtönen bestehen, ist das Frequenverhältnis dieser vier gleichzeitig erklingenden Töne

$$1 : 2^{\frac{4}{12}} : 2^{\frac{7}{12}} : 2^{\frac{10}{12}} \approx 1 : 1{,}260 : 1{,}498 : 1{,}781.$$

Die Beobachtung,[2] die der Theorie der reinen Stimmung zugrunde liegt, ist nun, dass dieses Verhältnis zwar *ungefähr*, aber nicht *exakt* 4 : 5 : 6 : 7 ist. Die „Unreinheiten“, die wir hier sehen, sind deutlich kleiner als ein Halbton, weswegen wir ihre Größe mit Hilfe der Einheit *Cent* ausdrücken, wobei 100 ct einem gleichstufigen Halbton entsprechen. Anders ausgedrückt: Die Oktave (d. h. die Multiplikation mit 2) umfasst 1.200 ct, also 1 ct entspricht dem Verhältnis $1 : 2^{\frac{1}{1200}}$. Wir können damit beispielsweise sehen, dass das Verhältnis 4 : 5 einer Differenz von

$$1.200\,\mathrm{ct} \cdot \log_2\left(\tfrac{5}{4}\right) \approx 386{,}31\,\mathrm{ct}$$

entspricht, es also von dem vier gleichstufige Halbtöne umfassenden Intervall (400 ct) um 13,69 ct abweicht. Diese Unterschiede „korrigiert“ die *reine Intonation*, indem sie Akkordbestandteile systematisch mikroalteriert (engl. „microtune“), also die Töne je nach harmonischem Kontext ein kleines bisschen höher oder tiefer

[1] Eine präzise physikalisch-anatomische Begründung dieses Phänomens würde den Rahmen des Kurses sprengen, nur so viel: Helmholtz’ Schwebungstheorie [2, § 10–12] zufolge ist ein Hauptkriterium für wahrgenommene Konsonanz zwischen zwei Tönen der Anteil an Überschneidungen ihrer Obertonspektren. Stehen nun die Frequenzen zweier Töne im Verhältnis kleiner Brüche zueinander, so gibt es in den entsprechenden Obertonspektren der jeweiligen Töne viele solcher Überschneidungen. Unsere Interpretation des Wortes „viele“ in diesem Kontext wird in Anhang A ausgeführt.

[2] Streng genommen erzählen wir hier die Geschichte nicht in historisch korrekter Reihenfolge, denn es ist mitnichten so, dass im Laufe der Musikgeschichte Defizite der gleichstufigen Stimmung erkannt und angepasst wurden. Vielmehr kann die Idee ganzzahliger Frequenzverhältnisse als Beginn der Musiktheorie gesehen werden, während heutzutage z. B. für Tasteninstrumente die gleichstufige Stimmung aus Gründen der Praktikabilität verwendet wird. Wir haben uns trotzdem für diese Darstellung entschieden, weil sie systematischer und zudem leichter zu verstehen ist.

spielt. Das ist natürlich auf Musikinstrumenten mit zwölf Tasten pro Oktave unmöglich; dort müssen andere Stimmungssysteme eingesetzt werden. Nur an der Theorie und nicht an praktischen Lösungsansätzen interessiert, werden wir letztere hier nicht ausführen. Unabhängig davon *ist* reine Intonation in der musikalischen Praxis durchaus einsetzbar, z. B. im A-cappella-Gesang: Professionell ausgebildete Chorsänger:innen hören aufeinander, um möglichst konsonant zu singen, und stimmen daher ihre Akkorde *intuitiv* aus, damit sie „einrasten", siehe etwa [7, § 2.4] für eine ausführliche Übersicht zu diversen empirischen Untersuchungen.

Dieses einführende Skript leitet die fürs Ausstimmen notwendigen Mikroalterationen systematisch her und erklärt, wie sie konsistent eingesetzt werden können, zeigt aber auch auf, an welchen Stellen dieses System an seine Grenzen stößt. Dabei gliedert es sich in folgende Abschnitte:

2. Mit der Einführung der *pythagoreischen Stimmung* erreichen wir, dass alle reinen Quinten das Frequenzverhältnis von 2 : 3 haben. Dies wird dazu führen, dass beispielsweise das ♯g etwas höher wird als das ♭a; dieser Unterschied heißt *pythagoreisches Komma*. Da wir aber nicht an ein Tasteninstument gebunden sind, ist das kein Problem; es zwingt uns nur dazu, Enharmonik ernst zu nehmen. Der Quintenzirkel wird zu einer unendlichen *Quintenspirale*. Von hier an ist unser Standardstimmungssystem das pythagoreische; das e″ hat also eine Frequenz von $\frac{3}{2} \cdot 440\,\mathrm{Hz} = 660\,\mathrm{Hz}$ und nicht mehr 659,26 Hz.

3. Selbst im pythagoreischen System sind Dreiklänge nicht optimal gestimmt, z. B. wäre ein Dur-Dreiklang 64 : 81 : 96 statt 4 : 5 : 6. Die große Terz ist ein bisschen zu hoch; der Unterschied $\frac{81}{80}$ wird als *syntonisches Komma* bezeichnet. Folglich bedeutet das Ausstimmen des Akkords eine Absenkung der großen Terz um ein syntonisches Komma. Wir erhalten eine zweite Quintenreihe, die um ein syntonisches Komma tiefer liegt. Wenn wir diesen Prozess in beide Richtungen wiederholen, können die entstehenden Reihen zum *Eulerschen Tonnetz* zusammengesetzt werden, in dem die Bestandteile von (Dur- und Moll-)Dreiklängen nebeneinander liegen und Dreiecke bilden. Da (gegen-)parallele Dreiklänge benachbarten Dreiecken entsprechen, eignet sich dieses Gitter gut für die klassische Harmonik, erklärt aber auch die sogenannte *Kommafalle* für bestimmte Akkordfolgen: eine häufige Quelle für Detonationen (das ist der Verlust der ursprünglichen Grundfrequenz).

4. Während das Eulersche Tonnetz gut geeignet ist, um *vertikale* Intervalle und Klänge zu stimmen, hat es auf der anderen Seite auch Auswirkungen auf *horizontale* Intervalle und dadurch auf die Melodieführung jeder einzelnen

beteiligten Stimme. Wir wollen uns dieser Effekte bewusst werden, um sie bei unseren darauffolgenden Überlegungen zu berücksichtigen.

5. Mithilfe des Eulerschen Tonnetzes lassen sich auch andere für die klassische Musik übliche Akkorde (etwa die Subdominante mit Sixte ajoutée) sinnvoll ausstimmen. Wir werden den Versuch unternehmen, dies konsistent für die meisten relevanten Harmonien zu tun.

6. Selbst innerhalb des Eulerschen Tonnetzes kann der oben beschriebene Vierklang 4 : 5 : 6 : 7 nicht realisiert werden – im Wesentlichen weil das Tonnetz nur die Primzahlen 2, 3 und 5 kennt. Ein Dur-Dreiklang mit kleiner Septime im Eulerschen Tonnetz hat stattdessen das Verhältnis 36 : 45 : 54 : 64. Die kleine Septime ist also ein bisschen zu hoch; der Fehler $\frac{64}{63}$ wird als *septimales Komma* bezeichnet. Wir werden einige (allerdings rar gesäte) Situationen in der klassischen Vokalmusik finden, in denen die Verwendung des septimalen Kommas erwogen werden kann.

Die Perspektive, von der aus wir große Teile dieses Skripts schreiben, ist folgende: *Wie müsste man in einem gegebenen mehrstimmigen Satz jeden einzelnen Ton mikroalterieren, um sowohl vertikal als auch horizontal das „bestmögliche“ Klangergebnis zu erhalten?* Unsere Formulierungen sind daher zumeist präskriptiv. Die Behauptung, dass einige dieser Anpassungen intuitiv umgesetzt werden, steht dazu allerdings in keinem Widerspruch: An den Stellen, wo eine Abwägung getroffen werden muss, ist auch vom Ensemble ein theoretisches Verständnis der Situation erforderlich.

Unsere Abhandlung ist mit mehreren musikalischen Beispielen versehen, die am Seitenrand dieses Dokuments angegeben sind (hier ist ein erstes Beispiel, in dem ein `m-4567`
Dur-Akkord mit kleiner Septime zu hören ist, einmal in gleichstufiger Stimmung und einmal genau 4 : 5 : 6 : 7, wie oben beschrieben). Diese Beispiele wurden mit dem Notensatzprogramm `lilypond` geschrieben und kodieren entweder eine PDF-Datei (dann beginnt ihr Name mit `p-`), eine MIDI-Datei (`m-`) oder beides (`b-`). Auf

github.com/fkranhold/jiam

finden sich sämtliche Quelldateien. Wir ermutigen alle, mit diesen Dateien selbst zu experimentieren. Darüber hinaus finden sich die von unserem Quelltext erzeugten Dateien (PDFs, MIDIs und OGGs) auf:

files.fkranhold.de/jiam.tar.gz

Eine weitere sehr hilfreiche Ressource beim Nachdenken und Experimentieren ist folgende Webanwendung, die alle in diesem Skript behandelten (nicht gleichstufigen) Töne und Intervalle sowie noch unzählige weitere berechnen kann:

hejicalc.plainsound.org

2. Reine Quinten und die pythagoreische Stimmung

2.1. Das Grad

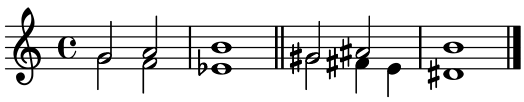
Wie in Abschnitt 1 erwähnt wollen wir uns zunächst mit dem genauen Verhältnis einer reinen Quinte (2 : 3) beschäftigen. Die Differenz zur gleichstufigen Quinte,

$$1.200\,\mathrm{ct}\cdot\log_2\left(\tfrac{3}{2}\right) - 700\,\mathrm{ct} \approx 1{,}96\,\mathrm{ct}$$

wird *Grad* genannt und ist sehr klein (etwa $^1/_{50}$ eines gleichstufigen Halbtons), aber dennoch etwas, das wir korrigieren wollen.

2.2. Enharmonik

Ohne die Einschränkungen eines Instruments mit diskreten Tonhöhen kann das Grad leicht korrigiert werden, sofern wir akzeptieren, dass enharmonisch unterscheidbare Tonhöhen (wie etwa ♯g und ♭a) verschiedenen Frequenzen entsprechen können. Dies mag auf den ersten Blick seltsam erscheinen, wirkt aber vielleicht durch das Beispiel aus Abbildung 1 etwas plausibler: In beiden Fällen ist das resultierende Intervall acht Halbtöne groß (♭e′ – h′ und ♯d′ – h′), aber im ersten Fall klingt es dissonant, da der Kontext nahelegt, dass es aus vier Ganztönen besteht, während es im zweiten Fall, wahrgenommen als kleine Sexte, konsonant klingt.



b-enhContext

Abbildung 1. Eine übermäßige Quinte ist keine kleine Sexte.

2.3. Die pythagoreische Stimmung

Akzeptierend, dass Enharmonik eine Rolle spielt, machen wir uns die Tatsache zunutze, dass es für jede enharmonisch präzise angegebene Tonhöhe (c′, ♯h und 𝄫d′ sind drei unterschiedliche Beispiele!) eindeutig bestimmte ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt, für die die gegebene Tonhöhe von a′ aus erreicht werden kann, indem man p reine Quinten und q Oktaven nach oben geht (eine negative Zahl bedeutet, dass man nach unten geht). Setzen wir den Kammerton auf 440 Hz, so ordnen wir der Tonhöhe die Frequenz $(\tfrac{3}{2})^p \cdot 2^q \cdot 440\,\mathrm{Hz}$ zu. Ein Beispiel:

$$\sharp\mathrm{g}' \equiv \left(\tfrac{3}{2}\right)^5 \cdot 2^{-3} \cdot 440\,\mathrm{Hz} \approx 417{,}66\,\mathrm{Hz},$$
$$\flat\mathrm{a}' \equiv \left(\tfrac{3}{2}\right)^{-7} \cdot 2^{4} \cdot 440\,\mathrm{Hz} \approx 412{,}03\,\mathrm{Hz}.$$

2.4. Das pythagoreische Komma und die Wolfsquinte

Der Unterschied zwischen den obigen Frequenzen für ♯g′ und ♭a′ heißt *pythagoreisches Komma* und beträgt $3^{12} \cdot 2^{-19} \approx 23{,}46\,\mathrm{ct}$, also etwa ¹/₄ eines gleichstufigen Halbtons. Wir bemerken, dass das pythagoreische Komma genau 12 Grad groß ist ($12 \cdot 1{,}96\,\mathrm{ct} \approx 23{,}46\mathrm{ct}$), was daran liegt, dass die beiden enharmonisch verwechselten Töne genau 12 Quinten (und einige Oktaven) auseinanderliegen.

Eine verminderte Sexte unterscheidet sich von einer reinen Quinte notwendigerweise um genau dieses pythagoreische Komma. Eine verminderte Sexte wird in der pythagoreischen Stimmung manchmal als *Wolfsintervall* (oder unpräziserweise als „Wolfsquinte“) bezeichnet, da sie sehr verstimmt klingt, siehe Abbildung 2 (2).

2.5. Die Quintenspirale

In Abbildung 3 ist eine enharmonische Variante des Quintenzirkels zu sehen, die wir als *Quintenspirale* bezeichnen können. Mit jeder vollen Runde in dieser Spirale verschiebt sich die Tonhöhe um ein pythagoreisches Komma, mit jedem Schritt (also ¹/₁₂ einer Runde) entfernen wir uns um 1 zusätzliches Grad von der gleichstufigen Stimmung (oder nähern uns ihr; je nach dem, in welche Richtung wir gehen).

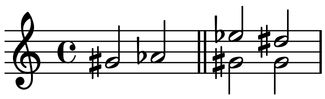
Da die Töne einer heptatonischen Skala (z. B. Dur) einen zusammenhängenden Abschnitt in dieser Quintenspirale bilden (z. B. sind die Töne von C-Dur genau die von f bis h), sind diese Skalen „in sich“ (also relativ zum Grundton) beinahe gleichstufig gestimmt: Die größte Abweichung in Dur ist die des Leittons (also des 7. Tons), der pythagoreisch ganze 5 Grad höher als gleichstufig ist.

b-pythComma

Abbildung 2. (1) Der Unterschied zwischen ♯g′ and ♭a′. (2) Das Wolfsintervall ♯g′ : ♭e″, gefolgt von der reinen Quinte ♯g′ : ♯d″.

2.6. Intervalle in pythagoreischer Stimmung

Für jedes (enharmonisch präzise angegebenes) Intervall können wir das entsprechende Frequenzverhältnis berechnen und angeben, um wie viel Grad das Verhältnis vom gleichstufigen Fall abweicht, siehe Tabelle 1.

Wir bemerken, dass diese Tabelle fast alle relevanten Intervalle abdeckt: Wenn ein bestimmtes Intervall das Verhältnis $a : b$ hat, so hat nämlich sein *Komplementärintervall* das Verhältnis $b : 2a$. Wenn es die Größe c in Cent hat, so hat sein Komplementärintervall die Größe $1.200\,\mathrm{ct} - c$, und die Abweichung in Grad wechselt das

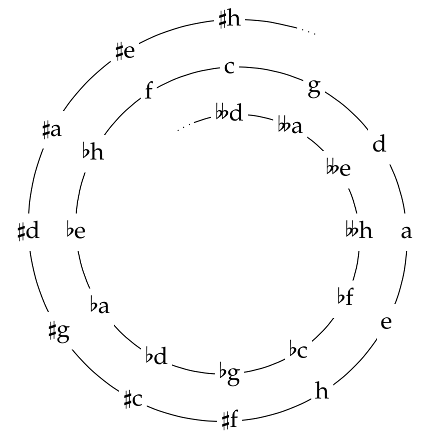


Abbildung 3. Die enharmonische Quintenspirale. Mit jeder vollen Rotation im Uhrzeigersinn gewinnen wir ein pythagoreisches Komma.

INTERVALL	VERHÄLTNIS	GRÖSSE IN CT	ABWEICHUNG IN GRAD
kleine Sekunde	243 : 256	90,22	−5
große Sekunde	8 : 9	203,91	+2
kleine Terz	27 : 32	294,13	−3
große Terz	64 : 81	407,82	+4
reine Quarte	3 : 4	498,04	−1

Tabelle 1. Ausgewählte Intervalle in pythagoreischer Stimmung und ihre Abweichung von den entsprechenden gleichstufig gestimmten Intervallen in Grad.

Vorzeichen. So entspricht eine kleine Sexte in pythagoreischer Stimmung dem Verhältnis 81 : 128, was dasselbe ist wie 792,18 ct und von der gleichstufigen kleinen Sexte um −4 Grad abweicht.

2.7. Einordnung

Während alle noch kommenden Mikroalterationen (die darauf abzielen, ganze Akkorde zu stimmen) den Preis haben werden, dass es mehrere Frequenzen für denselben Tonnamen gibt, verwendet die pythagoreische Stimmung nur die Informationen, die uns durch die geschriebenen Noten gegeben werden. Insbesondere haben in pythagoreischer Stimmung diatonische Halb- und Ganztöne (also kleine und große Sekunde) feste Größen; eine diatonische Skala in pythagoreischer Stimmung kennt also nur zwei Schrittweiten – eine Tugend, die durch kontextabhängige Mikroalterationen leider verloren gehen wird. Daher liegt es bei melodisch gedachten Passagen mit vielen horizontalen Schritten oft nahe, sie pythagoreisch zu intonieren.

Der entscheidende Nachteil der pythagoreischen Stimmung ist allerdings die Tatsache, dass sie die Unreinheit der Terzen in einem Dreiklang im Vergleich zur gleichstufigen Stimmung sogar noch erhöht: Der Unterschied zwischen einer pythagoreischen großen Terz (407,82 ct) und dem oben erwähnten Verhältnis 4 : 5 (386,31 ct) beträgt 21,51 ct. Dieser Fehler ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

3. Dreiklänge und das Eulersche Tonnetz

Von nun an interpretieren wir geschriebene Noten in pythagoreischer Stimmung und bezeichnen alle Abweichungen davon mit bestimmten Symbolen, die wir einführen, sobald sie notwendig werden.

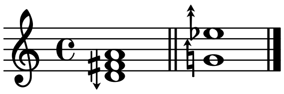
3.1. Das syntonische Komma und reine Terzen

Wir beginnen mit der Beobachtung, dass in pythagoreischer Stimmung ein Dur-Dreiklang dem Verhältnis 64 : 81 : 96 statt 4 : 5 : 6 = 64 : 80 : 96 entspricht, d. h. die große Terz etwas zu hoch ist (im Beispiel hören wir zuerst einen pythagoreischen Dur-Dreiklang und dann 4 : 5 : 6). Der Unterschied, $\frac{81}{80} \approx 21{,}51$ ct, heißt *syntonisches* m-pyth456
Komma.[3] Mit anderen Worten: Die pythagoreische große Terz 64 : 81 ist um ein syntonisches Komma größer als 4 : 5, und die pythagoreische kleine Terz 27 : 32 ist ein um ein syntonisches Komma kleiner als 5 : 6, denn 5 : 6 ist das Komplement von 4 : 5 in 2 : 3. Von nun an nennen wir das Verhältnis 4 : 5 eine *reine* große Terz und 5 : 6 eine *reine* kleine Terz. Folglich nennen wir ihre zur Oktave komplementären Intervalle 5 : 8 und 3 : 5 die *reine* kleine bzw. große Sexte.

3.2. Helmholtz-Ellis-Notation

Wenn man versucht, Tonhöhen um ein syntonisches Komma zu alterieren, um die Stimmung zu verbessern, stößt man auf das Problem, dass jeder Ton prinzipiell die große Terz, aber auch der Grundton eines Dreiklangs sein kann. Das bedeutet: Es hängt vom harmonischen Kontext ab, ob eine Tonhöhe alteriert werden muss oder nicht, und das lässt sich leider nicht aus dem bloßen (enharmonisch präzisen) Tonnamen herauslesen.

[3] Das syntonische Komma ist also *fast* genauso groß wie das pythagoreische. Der Unterschied, nämlich 23,46 ct $-$ 21,51 ct $\approx$ 1,95 ct, wird *Schisma* genannt und ist *fast* so groß wie ein Grad, aber nicht exakt, was wir auch ohne konkretes Nachrechnen begründen können: Das Verhältnis eines Schismas ist rational, während ein Grad $\frac{3}{2} \cdot 2^{-\frac{7}{12}}$ und damit irrational ist.



p-HE

Abbildung 4. Im ersten Takt ist das ♯↓f′ um ein syntonisches Komma tiefalteriert, sodass wir einen Dur-Dreiklang 4 : 5 : 6 erhalten. Im zweiten Takt wird das g′ um ein, das ♭↑↑e″ um zwei syntonische Kommata hochalteriert, sodass sich eine reine kleine Sexte 5 : 8 ergibt.

Bei einer Partitur ergänzen wir die zusätzliche Information, dass bestimmte Noten um ein oder mehrere syntonische Kommata abgesenkt oder angehoben werden müssen, durch das Hinzufügen von Pfeilen an die schon existenten Versetzungszeichen in der Tradition von Helmholtz und Ellis [2] mit den Glyphen von [8]: Die Versetzungszeichen 𝄪↑, ♯↑, ♮↑, ♭↑, und 𝄫↑ bedeuten also die Erhöhung des Tons um ein syntonisches Komma; genauso bedeuten 𝄪↑↑, ♯↑↑, ♮↑↑, ♭↑↑, und 𝄫↑↑ zwei Kommata und so weiter. In die andere Richtung benutzen wir 𝄪↓, ♯↓, ♮↓, ♭↓, und 𝄫↓ für Noten, die um ein syntonisches Komma tiefer erklingen sollen. Ein Beispiel ist in Abbildung 4 zu sehen. Wie üblich gelten Versetzungszeichen für einen ganzen Takt; wenn also ein einzelner Takt erst ♮↓a′ und dann ♮a′ enthält, so müssen beide Versetzungszeichen angegeben werden. Aus Gründen, die im nächsten Unterabschnitt erläutert werden, verwenden wir überhaupt keine Generalvorzeichen.

3.3. Die ptolemäische Skala

Ein klassischer Ansatz, syntonische Kommata konsequent in einem ganzen Musikstück einzusetzen, besteht darin, die pythagoreisch gestimmte Dur-Tonleiter zu verändern, indem die Töne, die am ehesten als große Terzen eines Dreiklangs auftreten – nämlich Terz, Sexte und Septime, um ein syntonisches Komma – gesenkt werden. Das Ergebnis nennt man die *ptolemäische Skala*. Legt man die Frequenz des Grundtons der Skala als 1 fest, lassen sich die Frequenzen aller in der Skala vorkommenden Noten als $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2$ berechnen. Dieser Logik folgend müsste etwa C-Dur drei Generalvorzeichen haben, nämlich ♮↓e, ♮↓a und ♮↓h.

Wir haben uns aus den folgenden Gründen gegen die Verwendung dieser Skala entschieden (wir vermeiden das Wort „Skala“ sogar ganz):

1. Der zweite Ton (in C-Dur: das d) der Skala kommt in zwei wichtigen „Rollen“ vor: Als Quinte der Dominante (g : h : d) und als Grundton der Subdominantparallele (d : f : a). Im Falle der Subdominantparallele muss auch dieser zweite Ton um ein syntonisches Komma tiefalteriert werden. Da beide Funktionen mit ähnlicher Häufigkeit auftreten, ist unklar, welcher Alteration im Rahmen einer globalen Skala der Vorzug zu geben ist.

2. Die ptolemäische Skala weist nur einigen Tonhöhen eine Frequenz zu. Es gibt aber Tonhöhen, die mit einer Tonart „eng verwandt“ sind, auch wenn sie technisch gesehen nicht zu ihrer Tonleiter gehören (z. B. das ♯f in C-Dur, was die große Terz der Doppeldominante ist).

3. Wie wir in Abschnitt 4.4 auseinandersetzen werden, wirken horizontale Linien mit unterschiedlich großen Ganztonschritten unausgewogen, weswegen man in melodisch gedachten Passagen diese Skala nicht verwenden würde.

3.4. Das Eulersche Tonnetz

Stattdessen wollen wir alle möglichen Frequenzen in einer Weise anordnen, die ihre harmonische Nähe zueinander widerspiegelt. Dies wird typischerweise durch das *Eulersche Tonnetz* erreicht, siehe Abbildung 5: Wir beginnen mit der Quintenspirale aus Abschnitt 2, die wir jetzt als waagerechte Gerade schreiben, und unterteilen jeden Schritt (2 : 3) in eine reine große Terz (4 : 5) und eine reine kleine Terz (5 : 6). Dieser Ton wird zwischen dem ersten und dem zweiten, aber etwas weiter unten notiert. Wenn wir alle Schritte unterteilen, erhalten wir eine vollständige neue Zeile, die wieder aus reinen Quinten besteht, aber jetzt sind die Frequenzen in dieser Zeile um ein syntonisches Komma erniedrigt. Dasselbe lässt sich auch in der anderen Richtung machen, indem man die Reihenfolge von kleiner und großer Terz vertauscht und die Zwischentöne etwas höher als die Ursprungsgerade schreibt. Wir erhalten eine neue Quintenreihe, in der alle Frequenzen um ein syntonisches Komma erhöht sind. Wenn wir diesen Prozess in beide Richtungen wiederholen, erhalten wir ein Tonhöhengitter (siehe Abbildung 5), in dem benachbarte Töne im Verhältnis einer reinen Quinte, reinen großen Terz oder reinen kleinen Terz stehen.

Jeder (enharmonisch präzise angegebene) Ton kommt (modulo Oktave) in jeder Zeile genau einmal vor, sodass ein Knoten im Netz einem Ton zusammen mit einer Anzahl von darauf angewendeten syntonischen Kommata entspricht. Diese Anzahl der syntonischen Kommata nennen wir die *Kommahöhe* des Knotens. Beispielsweise hat ♯c die Kommahöhe +2. Zwei Knoten haben genau dann die gleiche Kommahöhe, wenn sie in der gleichen „Zeile“ des Tonnetzes stehen.

3.5. Geometrie im Tonnetz

Im Eulerschen Tonnetz umfasst ein Dreieck der Form ▽ die Bestandteile eines rein intonierten Dur-Akkords (4 : 5 : 6), während ein Dreieck △ die Bestandteile eines Mollakkords (10 : 12 : 15) erfasst. Benachbarte Dreiecke teilen sich entweder eine Quinte, d. h. sie sind *Varianten* voneinander, oder eine Terz, d. h. sie stehen in *paralleler* (△▽) oder *gegenparalleler* (▽△) Beziehung zueinander. Legt man ein Dreieck als To-

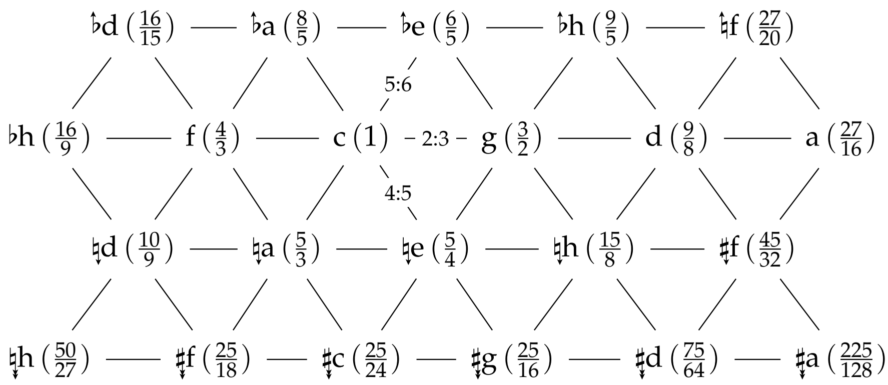


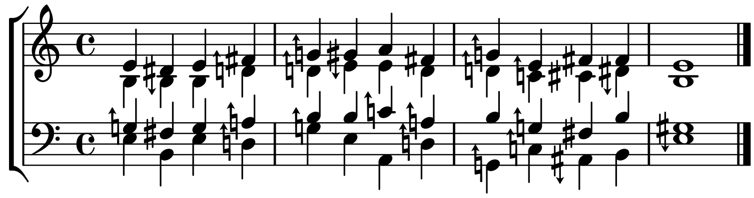
Abbildung 5. Ein Ausschnitt des Eulerschen Tonnetzes. Wir berechnen Frequenzfaktoren relativ zum c, und „oktav-normiert", sodass sie zwischen 1 und 2 liegen.

nika eines Stücks fest, so lassen sich die Standardfunktionen wie (Sub-)Dominanten sowie ihre (Gegen-)Parallelen und sogar Zwischendominanten (vgl. [4, § 10]) leicht ermitteln: Für ein gegebenes Dreieck ist seine Zwischendominante das Dur-Dreieck, das die Quinte rechts neben dem gegebenen Dreieck enthält (z. B. ist die Doppeldominante von C-Dur der D-Dur-Dreiklang in der Mitte rechts in Abbildung 5, nicht der Dreiklang unten links, der ein syntonisches Komma tiefer liegt.

3.6. Mikroalterationen funktionaler Harmonien

Bei einem Musikstück (z. B. Abbildung 6) bestimmt man zunächst seine Tonart (hier: e-Moll). Dann wird das Tonika-Dreieck im Eulerschen Tonnetz eindeutig durch den Modus (Dur oder Moll) und die Bedingung, dass der Grundton (hier: e) Kommahöhe 0 hat, bestimmt. Für jeden Ton bestimmen wir dann den Dreiklang, zu dem er gehört (der vierte Ton des Tenors, a, ist Teil eines D-Dur-Dreiklangs) und die Funktion des Dreiklangs (Zwischendominante zur Tonikaparallele), und finden dann das entsprechende Dreieck im Eulerschen Tonnetz (siehe Abbildung 7 für die Verortung aller in Abbildung 6 vorkommenden Dreiklänge im Eulerschen Tonnetz). Daraus ergibt sich dann, wie viele syntonische Kommata wir auf die Note anwenden müssen (hier: a muss um eines erhöht werden). Im Beispiel beträgt seine absolute Frequenz also $\frac{81}{80} \cdot 220\,\mathrm{Hz} = 222{,}75\,\mathrm{Hz}$.

Wir weisen darauf hin, dass bei einem Stück in C-Dur der Grundton eines a-Moll-Dreiklangs um ein syntonisches Komma gesenkt ist, während dies bei einem Stück in a-Moll nicht der Fall ist – stattdessen ist hier der Grundton des C-Dur-Dreiklangs um ein syntonisches Komma erhöht. Daher hat bei einem Stück mit gegebenen Generalvorzeichen die Interpretation, welcher der beiden möglichen Dreiklänge die



b-triadPiece

Abbildung 6. Ein schematisches vierstimmiges Stück in e-Moll (nur aus Dreiklängen), mit eingebauten syntonischen Kommata. Es gibt zwei Audioausgaben des Stücks, eine in reiner pythagoreischer Stimmung und eine, die die syntonischen Kommata zur Korrektur verwendet.

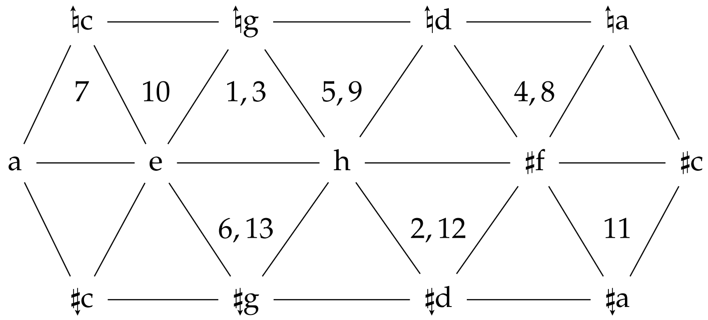


Abbildung 7. Die Dreiklänge die im Notenbeispiel von Abbildung 6 auftauchen, verortet im Eulerschen Tonnetz.

Tonika ist (z. B. C-Dur oder a-Moll), Auswirkungen darauf, wie hoch das Stück intoniert werden soll. Das mag seltsam klingen, ergibt sich aber zwingend, wenn wir uns darauf einigen, dass der Grundton der Tonika als Zentrum des Stücks Kommahöhe 0 haben soll. Im Übrigen ist dies auch aus praktischen Gesichtspunkten sinnvoll, um die Anzahl der Mikroalterationszeichen zu minimieren.

Wir bemerken abschließend, dass die „richtige“ Intonation von der Interpretation der Funktion, die der Dreiklang darstellt, abhängt. Ein D-Dur-Dreiklang in C-Dur z. B. wird wohl in den meisten Fällen als Doppeldominante verstanden werden, in seltenen Fällen aber auch als „dorische“ Subdominante der Tonikaparallele (a-Moll). Im zweiten Fall müsst der Akkord ein syntonisches Komma tiefer gespielt werden.

3.7. Die Kommafalle

Werfen wir einen erneuten Blick auf den Ausschnitt des Eulerschen Tonnetzes in Abbildung 5, so finden wir den Ton d an zwei Stellen in der Nähe von c, nämlich ♮d ($\frac{10}{9}$) and d ($\frac{9}{8}$). Beide erscheinen als Eckpunkte von Dreiecken, die Funktionen in C-Dur entsprechen: Der erste als Grundton von d-Moll (Subdominantparallele, kurz Sp) und der zweite als Quinte von G-Dur (Dominante, kurz D) – dies ist genau das Phänomen, das wir in Abschnitt 3.3 im Zuge unserer Kritik an einer festen mikroalterierten Skala erwähnt haben.

Man stelle sich nun ein Stück vor, das die Funktionen Sp und D direkt hintereinander enthält, sowie eine Stimme, die den Grundton der Sp hat und hält, während er zur Quinte von D wird (siehe Abbildung 8). Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Einer der Akkorde wird um ein syntonisches Komma transponiert.
2. Die haltende Stimme muss die Tonhöhe beim Harmoniewechsel *nachjustieren*.

In der Vokalmusik geschieht typischerweise ersteres, weil die übliche Interpretation des Haltens einer Note darin besteht, sie – *per definitionem* – nicht zu verändern, und die übrigen Stimmen, die sich bewegen müssen, ihre richtige Intonation im Verhältnis zum gehaltenen Ton suchen. Die Folge ist, dass der zweite Akkord (D) um ein syntonisches Komma absinkt und das Ensemble an Intonation verliert, d. h. es *detoniert*, siehe den ersten Teil von Abbildung 8. Dieser Effekt wird als *Kommafalle* bezeichnet. Wenn dieses Phänomen fünfmal auftritt, beträgt die Detonation $5 \cdot 21{,}51\,\mathrm{ct} = 107{,}55\,\mathrm{ct}$, d. h. das Ensemble ist in Summe um mehr als einen gleichstufigen Halbton gesackt.

Die wünschenswertere Lösung, die jedoch vom Ensemble ein Verständnis der harmonischen Situation verlangt, ist die zweite, die im zweiten Teil von Abbildung 8 dargestellt ist. Dieses Beispiel zeigt, dass das theoretische Bewusstsein für reine Intonation (die, wie wir behauptet haben, Chorsänger:innen intuitiv nutzen) dabei helfen kann, die Ursache für ein sehr praktisches und häufiges Problem aufzuspüren, nämlich das des Intonationsverlusts.

Die Akkordfolge Sp–D ist nicht die einzige, die Kommaabweichungen verursachen kann. Der dritte Teil von Abbildung 8 zeigt eine modulierende Akkordfolge, die die Doppeldominante einbezieht. Hier müssen sogar zwei Stimmen, die eine Quinte voneinander entfernt sind, ihre Intonation anpassen. Die gleichzeitigen Anpassungen ergeben zusammen eine „Bewegung“ in parallelen Quinten.[4]

4. Die melodische Perspektive

Das kontextabhängige Mikroalterieren von Tönen in einem Stück hat nicht nur Einfluss auf die vertikale Struktur eines Satzes (also die aus den Tönen bestehenden *Akkorde*), sondern auch auf die horizontale Strukur (also die aus den Tönen bestehenden *Melodien*). Wir wollen diese Effekte explizit machen.

[4]Das Parallelenverbot im klassischen Kontrapunkt ist nicht für solche „Mikroparallelen“ ausgelegt, weswegen diese Bewegungen satztechnisch unproblematisch sind.

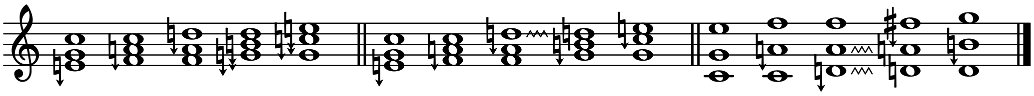


Abbildung 8. (1) Eine Akkordfolge, bei der alle wiederholten Tonhöhen auf die gleiche Weise intoniert werden, wodurch eine Detonation um ein syntonisches Komma entsteht. (2) Dieselbe Akkordfolge mit der notwendigen Anpassung (durch eine Zick-Zack-Linie gekennzeichnet): Zwischen dem dritten und dem vierten Akkord muss der Sopran das d″ anpassen. (3) Eine ähnliche Situation, in der sogar zwei Stimmen eine Anpassung vornehmen müssen, was eine Komma-Bewegung in „parallelen Quinten" verursacht.

4.1. Schritte

In der klassischen Musiktheorie ist ein *Schritt* ein horizontales Intervall der Größe einer Sekunde, vgl. [4, 7.1]. Für intonationstheoretische Belange ist es sinnvoll, den Begriff etwas anders zu gebrauchen: Für uns ist ein *Schritt* eines der drei folgenden enharmonisch präzisen Intervalle:

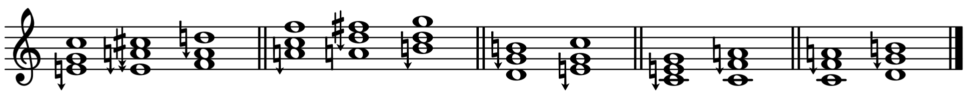
- übermäßige Prime (etwa c – ♯c), genannt *chromatischer Halbton*,
- kleine Sekunde (etwa h – c), genannt *diatonischer Halbton*.
- große Sekunde (etwa c – d), genannt *Ganzton*.

In gleichstufiger Stimmung sind sowohl chromatischer als auch diatonischer Halbton 100 ct und der Ganzton 200 ct groß. Schon in pythagoreischer Stimmung spielt die Enharmonik eine Rolle; hier ist der chromatische Halbton (113,69 ct) ein pythagoreisches Komma größer als der diatonische (90,22 ct). Man kann sich dies am Beispiel aus Abschnitt 2.3 klarmachen: Der chromatische Halbton g – ♯g unterscheidet sich vom diatonischen Halbton g – ♭a genau um den Unterschied zwischen ♯g und ♭a, der wie in Abschnitt 2.4 festgestellt genau ein pythagoreisches Komma ist.

Im harmonischen Kontext und unter Verwendung des Eulerschen Tonnetzes sieht das nochmal anders aus: Abbildung 9 zeigt fünf typische Akkordfolgen in C-Dur, bei denen verschiedene Schritte in der obersten Stimme auftreten, geordnet nach Größe des jeweiligen Schrittes:[5]

1. *Kleiner chromatischer Halbton*
   Wechselt man vom Grundton der Tonika (c) mit einem chromatischen Halbton in die Terz der Zwischendominante zur Subdominantparallele (♯c), so verliert man im Vergleich zum pythagoreischen chromatischen Halbton ganze zwei syntonische Kommata. Der entstehende Halbton (70,67 ct) entspricht dem Verhältnis 24 : 25 und ist sehr klein. Dieser Halbton ist der gleiche wie der zwischen Mollterz (♭e) und Durterz (♮e) zueinander varianter Dreiklänge.

[5] Die englische Wikipedia ist an dieser Stelle irreführend und stellenweise mathematisch inkorrekt.



b-steps

Abbildung 9. Verschiedene Schritte in der Oberstimme:
(1) Kleiner chromatischer Halbton c – ♯c vom Grundton der T zur Terz der $(D)_{[Sp]}$,
(2) Großer chromatischer Halbton f – ♯f vom Grundton der S zur Terz der 𝔻,
(3) Reiner diatonischer Halbton ♮h – c von der Terz der D zum Grundton der T,
(4) Kleiner Ganzton g – ♮a von der Quinte der T zur Terz der S,
(5) Großer Ganzton ♮a – ♮h von der Terz der S zur Terz der D.

2. *Großer chromatischer Halbton*
   Wechselt man vom Grundton der Subdominante (f) mit einem chromatischen Halbton in die Terz der Doppeldominante (♯f), so verliert man diesmal nur ein syntonisches Komma. Der entstehende Halbton ($128 : 135 \approx 92{,}18\,\text{ct}$) ist recht nah am gleichstufigen, allerdings noch immer etwas kleiner.

3. *Reiner diatonischer Halbton*
   Wechselt man von der Terz der Dominante (♮h) mit einem diatonischen Halbton in den Grundton der Tonika (c), so gewinnt man im Vergleich zum pythagoreischen diatonischen Halbton ein syntonisches Komma. Der entstehende Halbton entspricht dem Verhältnis $15 : 16$ und beträgt $111{,}73\,\text{ct}$. Wir bemerken, dass dieser Schritt in jedem Dominante-Tonika-Verhältnis, also auch bei Zwischendominanten, so auftaucht, siehe auch Abschnitt 4.3.

4. *Kleiner Ganzton*
   Wechselt man von der Quinte der Tonika mit einem Ganzton in die Terz der Subdominante (♮a), so verliert man im Vergleich zur pythagoreischen großen Sekunde ein syntonisches Komma. Der entstehende Schritt entspricht dem recht einfachen Verhältnis $9 : 10$ und beträgt $182{,}40\,\text{ct}$, ist also recht deutlich unterhalb des gleichstufigen.

5. *Großer Ganzton*
   Wechselt man zum Beispiel von der Terz der Subdominante (♮a) zur Terz der Dominante (♮h), so bleibt man auf derselben Kommahöhe. Es entsteht also ein reiner pythagoreischer Ganzton, der dem Verhältnis $8 : 9$ und damit $203{,}91\,\text{ct}$ (also gleichstufiger Ganzton plus 2 Grad) entspricht. Selbiges gilt für den Wechsel vom Grundton der Subdominante (f) zum Grundton der Dominante (g), eine typische Bassbewegung.

Wir bemerken, dass in allen auftretenden Situationen chromatische Halbtöne anders als im pythagoreischen Fall *kleiner* als diatonische Halbtöne sind. Dies liegt daran,

BEZEICHNUNG	BEISPIEL	VERHÄLTNIS	GRÖSSE IN CT
kleiner chromatischer Halbton	c – ♯c	24 : 25	70,67
großer chromatischer Halbton	f – ♯f	128 : 135	92,18
Limma	a – ♭h	243 : 256	90,22
reiner diatonischer Halbton	♮h – c	15 : 16	111,73
großer diatonischer Halbton	♮d – ♭e	25 : 27	133,24
kleiner Ganzton	g – ♮a	9 : 10	182,40
großer Ganzton	f – g	8 : 9	203,91

Tabelle 2. Verschiedene Schritte und ihre Größen

dass im harmonischen Kontext die Verteilung der syntonischen Kommata dem pythagoreischen Komma genau entgegengesetzt ist (z. B. g – ♯g, aber g – ♭a).

Zusätzlich zu diesen fünf harmonisch begründbaren Schritten wollen wir noch zwei weitere Halbtöne erwähnen, die im späteren Verlauf an noch nicht diskutierten Stellen auftreten können. Um unsere die Größe der Schritte berücksichtigende Nummerierung nicht kaputtzumachen, quetschen wir sie dazwischen:

2 ½. *Limma* (griechisch „Überrest“)
Ein diatonischer Halbton, bei dem beide Töne auf derselben Kommahöhe liegen. Dieser Schritt kommt in vertikal gedachten Passagen (fast) nicht vor, dafür aber an melodisch gedachten, z. B. wenn in einer Tonleiter nur große Ganztöne verwendet werden, vgl. Abschnitt 4.4. Wie schon in Abschnitt 2.6 festgestellt entspricht er dem Verhältnis 243 : 256, also 90,22 ct.

3 ½. *Großer diatonischer Halbton*
Ein diatonischer Halbton, bei dem wir zwei syntonische Kommata gewinnen, wie z. B. ♮d – ♭e. Dieser Schritt entspricht dem Verhältnis 25 : 27, also 133,24 ct. Weil er selten auftritt und wegen seiner ungewöhnlichen Größe auch nur begrenzt gut klingt, sehen wir davon ab, den schon besprochenen reinen diatonischen Halbton (also 15 : 16) zur Abgrenzung „klein“ zu nennen – jener ist in harmonisch gedachten Passagen der Standardfall.

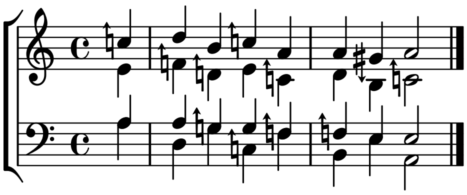
Diese sieben Schritte, ihre Verhältnisse und Größen sind in Tabelle 2 noch einmal kurz und bündig zusammengefasst.

Als eine Moral dieses Unterabschnitts könnte man festhalten: *Halbton ist nicht gleich Halbton.* Dies liefert eine mathematische Begründung für das Phänomen, dass Laienchöre bei chromatischen Linien oft detonieren: Es liegt nahe, zu glauben, dass Halbtöne stets gleich groß seien, und auch, dass die Stimme, die die Chromatik singt, die einfachste Aufgabe habe – schließlich bewegt sie sich ja immer um die „kleinste Einheit“. Alles an dieser auf den ersten Blick einleuchtenden Vermutung widerspricht obiger Berechnung. Stattdessen muss sich die sich chromatisch bewegende Stimme an den sie umgebenden Harmonien orientieren.

4.2. Quintfälle

Ein weiteres wichtiges horizontales Intervall ist die Quinte (bzw. komplementär dazu: die Quarte), denn oft setzen sich Basslinien aus ihnen in Form sogenannter *Quintfälle* zusammen, vgl. [4, 12.3]. Wir bemerken, dass in einer üblichen Akkordfolge so ein Quintfall nicht ausschließlich das für vertikale Intervalle so erstrebenswerte Verhältnis 2 : 3 nutzt, sondern zumeist wenigstens einmal ein Komma abgezogen (bzw. zur Quarte hinzuaddiert) wird, siehe Abbildung 10. Dieses Intervall wird oft *unreine Quinte* (oder *unreine Quarte*) genannt und hat das Verhältnis $27 : 40 \approx 680{,}45\,\mathrm{ct}$ (oder komplementär dazu $20 : 27 \approx 519{,}55\,\mathrm{ct}$).

Dies ist aber auch nicht besonders tragisch: Ein üblicher Quintfall muss sogar wenigstens eine *verminderte* Quinte enthalten, um nicht zu modulieren (hier: von ♮f auf h), weswegen man derartige Abweichungen gewohnt ist.

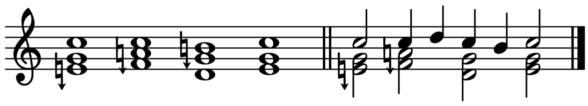


b-5fall

Abbildung 10. Ein Quintfall im Bass, bei dem der Sprung d – ♮g um ein syntonisches Komma größer als die reine Quarte 3 : 4 ist. Der Akkord h : ♮f : d : a im letzten Takt ist die Subdominante mit Sexte im Bass, deren Ausstimmung in Abschnitt 5.2 erklärt wird.

4.3. Leittöne

Wir bemerken, dass die Terz im (Zwischen-)Dominantdreiklang so wie in allen Durdreiklängen auch um ein syntonisches Komma abgesenkt wird, was dem häufig im Instrumentalunterricht vermittelten Ideal widerspricht, den Leitton (also den Ton, der eine kleine Sekunde unter dem Grundton liegt) höher zu intonieren, um die „Spannung zu erhöhen“: In unserer mathematischen Beschreibung liegt der Leitton um einen diatonischen Halbton und damit 111,73 ct unter dem Grundton, was *tiefer* als der gleichstufige Leitton ist.



b-lead

Abbildung 11. Zwei Arten, eine Kadenz zu intonieren: Einmal mit reiner Intonation aller Dreiklänge und einmal, in einem bewegteren Kontext, mit einem pythagoreischen Leitton.

Dieser Widerspruch wurde auch in [9, S. 211] benannt und diskutiert, mit dem Ergebnis, dass es stark auf den Kontext ankommt: In homophonen Sätzen, bei denen die *vertikale* Struktur der Musik im Vordergrund steht, sollte die Dominante ein eigenständiger, stabiler Dur-Dreiklang sein und der Leitton somit tief intoniert werden. Steht hingegen die melodische Bewegung einzelner Stimmen, also die *horizontale* Struktur im Vordergrund (wir merken an, dass dies in keinem unserer bisherigen Beispiele der Fall war), so kann man in Erwägung ziehen, den Leitton pythagoreisch zu intonieren, wodurch er nur noch 90,22 ct unter dem Grundton und damit über dem gleichstufigen Leitton läge. Der entstehende vertikale Dominantdreiklang hätte dann das Verhältnis 64 : 81 : 96. In Abbildung 11 hören wir zwei Versionen einer Kadenz, eine mit einem rein intonierten Leitton, eine mit einem pythagoreischen Leitton.

4.4. Sinnvoll abwägen

Die Diskussion um den Leitton aus dem vorherigen Abschnitt ist nur ein Beispiel eines allgemeineren Priorisierungsproblems, das wir bisher absichtsvoll umgangen sind: Alle bisherigen Beispiele haben homophone Sätze betrachtet, bei denen der Aspekt der *Bewegung* der einzelnen Stimmen zumeist nachrangig war. Außerdem haben wir unsere Beispiele stets langsam genug gespielt, um uns Zeit zu geben, wahrzunehmen, wie die Akkorde einrasten. Dies ist dadurch gerechtfertigt, dass tatsächlich ein gehöriger Teil klassischer Chormusik auf diese Weise gedacht ist und musiziert wird; insbesondere *enden* viele Stücke auf diese Weise. Es blendet allerdings aus, dass auch Vokalmusik ganz anders konzipiert sein kann.

Als extremes Gegenbeispiel mag Abbildung 12 dienen, bei der – obwohl auf den einzelnen Schlägen vertikal funktionale Harmonien klar erkennbar sind – die Stimmen ständig in Bewegung sind und dem Akkord gar keine Zeit gegeben wird, einzurasten. Außerdem klingen die melodische Linien „schief", wenn viele unterschiedlich große Schritte (insbesondere zwei unterschiedliche Ganztöne) in ihr vorkommen. In solchen Situationen ist es empfehlenswert, auf entsprechende syntonische Kommata zu verzichten und stattdessen stellenweise komplett pythagoreisch (relativ zum lokalen tonalen Zentrum) zu intonieren. Wir empfehlen, die Alt- oder Bassstimme des Beispiels einmal selbst zu singen und mit den Hörbeispielen zu b-melody

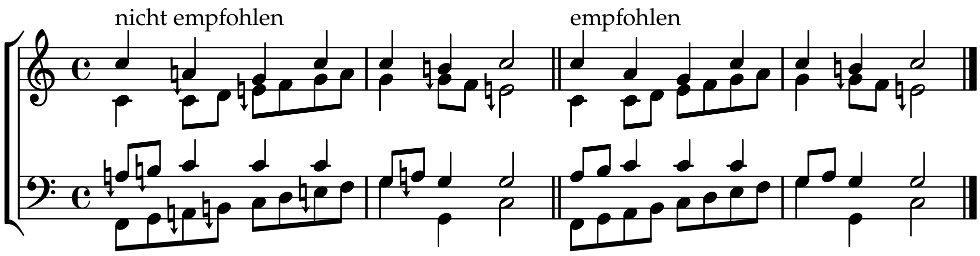


Abbildung 12. Eine melodisch gedachter Abschnitt, einmal vollständig rein ausgestimmt (nicht empfohlen) und einmal über weite Strecken pythagoreisch gestimmt.

vergleichen. Unser Hauptgrund, pythagoreisch und nicht direkt gleichstufig zu intonieren, ist, dass es uns dieser Ansatz ermöglicht, an *ausgewählten* Stellen doch Kommata zu verwenden, um sie rein zu stimmen – hier die letzten beiden Akkorde, bei denen eine Kadenz erkennbar ist und wo deutlich weniger Bewegung stattfindet.

Wieder anders sieht die Situation in Abbildung 13 aus: Dieses Beispiel ist im Wesentlichen homophon und langsam – nur vereinzelt gibt es Zwischennoten (hier: Durchgangsnoten und angesprungene Nebennoten). Hier empfiehlt es sich, zunächst die Akkorde rein zu stimmen und sich erst dann mit den Zwischennoten zu befassen. Um ihre Kommahöhe zu ermitteln, scheinen uns folgende Kriterien sinnvoll, mit absteigender Priorisierung:

1. Alle auftretenden Schritte sollten in Tabelle 2 gelistet sein.
2. Taucht ein Ton auf zwei unterschiedlichen Kommahöhen auf, so sollten dazwischen mindestens zwei andere Töne liegen.
3. Die Zwischennote sollte von der vorherigen Note aus durch ein pythagoreisches Intervall erreicht werden.

So würde Kriterium 3 in obigem Beispiel für die erste Durchgangsnote h im Bass die gleiche Kommahöhe wie beim c nahelegen; dies wird allerdings von Kriterium 1 verunmöglicht, weil dadurch der Ganzton zum ♮a zu groß würde. Die zweite Zwischennote, also das g im Alt, wird vom ♮e aus erreicht, weswegen Kriterium 3 ♮g nahelegt. Dies ist vereinbar mit den Kriterien 1 und 2, da der darauffolgende Schritt zum f ein kleiner Ganzton ist. Die dritte Zwischennote, das c im Sopran, taucht nach zur einem weiteren Ton (dem ♮h) ohne Mikroalteration auf. Daher legt Kriterium 2 die Syntonisierung ♮c nahe, was mit Kriterium 1 vereinbar ist.

Wieder anders sieht das Ganze aus, wenn in einer Melodie *gebrochene Akkorde* auftreten. Dies sind zwar horizontale Intervalle, die allerdings nicht melodisch, sondern harmonisch gedacht sind. Hier scheint es uns sinnvoll zu sein, sie genau wie vertikale Akkorde zu stimmen, siehe Abbildung 14.

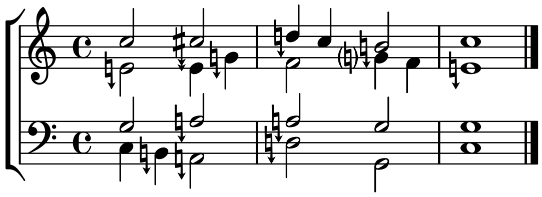


Abbildung 13. Ein im Wesentlichen homophoner Satz, mit vereinzelten Zwischennoten. Die Akkorde sind rein gestimmt; für die Zwischennoten gibt es unterschiedliche Anhaltspunkte.

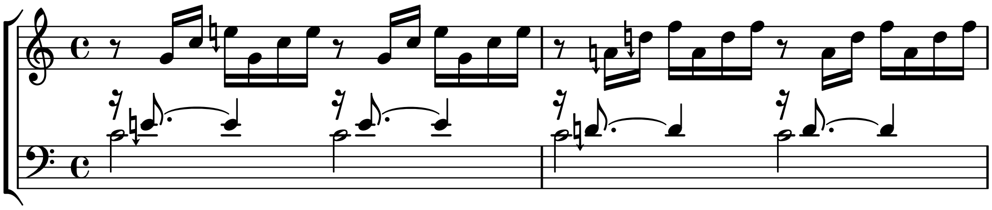


Abbildung 14. Der Beginn von Bachs Präludium C-Dur (BWV 846) aus dem *Wohltemperierten Klavier 1*, rein ausgestimmt.

5. Komplexere Akkorde

In Abschnitt 3 haben wir gelernt, wie man Stücke stimmt, bei denen jede Note Teil eines „vertikalen" Dur- oder Molldreiklangs ist. Akkorde haben jedoch sehr oft andere Bestandteile als nur Grundton, Terz und Quinte. In diesem Abschnitt besprechen wir die wichtigsten Variationen von Dur- und Moll-Akkorden und wie sie gestimmt werden können. (Zur quantitativen Bewertung der entstehenden Frequenzverhältnisse sei wieder auf Anhang A verwiesen.)

5.1. Quart(sext)vorhalt und erweiterter Nonakkord

Ein Dreiklang mit *Quartvorhalt* besteht aus dem Grundton, der Quarte und der Quinte, wobei sich die Quarte in der Regel auf dem nächsten Schlag in die (große oder kleine) Terz auflöst, vgl. [4, 8.2]. Dieser Akkord entspricht in pythagoreischer Stimmung bereits dem sehr übersichtlichen Verhältnis 6 : 8 : 9 und benötigt keine Korrektur durch ein syntonisches Komma (was auch daran liegt, dass hier nur Quarte und Quinte vorkommen, Quinten optimal gestimmt und Quarten dazu komplementär sind). Wir weisen noch auf zwei horizontale Intervalle hin:

1. Die Quarte des Akkordes muss *konsonant eingeführt* werden, d. h. dieselbe Note tauchte im vorherigen regulär Akkord auf und ist durch den Harmoniewechsel zur Quarte geworden. Stellt man sich z. B. die Akkordverbindung $\mathrm{T}-\mathrm{D}^{4-3}$ vor, bei der der Grundton der Tonika zur Quarte der Dominante wird,

so ist keine Anpassung notwendig, da beide Töne, Grundton der Tonika und Quarte der Dominante, auf der gleichen Kommahöhe liegen.

2. Die Quarte löst sich abwärts mit einem reinen diatonischen Halbton (15 : 16) in die große oder mit einem kleinen Ganzton (9 : 10) in die kleine Terz auf.

Bei einem Dreiklang mit *Quartsextvorhalt* ist nicht nur die Terz durch die Quarte, sondern auch die Quinte durch die (kleine oder große) Sexte ersetzt. Diesen stimmen wir, indem wir bemerken, dass hier die Bestandteile eines normalen Dreiklangs (dessen Grundton die Quarte ist) vorliegen, den wir wie bisher stimmen wollen. Folgliche wird die große Sexte um ein syntonisches Komma gesenkt (es entsteht 3 : 4 : 5) und die kleine Sexte um ein syntonisches Komma erhöht (es entsteht 15 : 20 : 24).

Der *erweiterte Nonakkord* ist ein Vierklang, der sich aus aus einem (Dur- oder Moll-)Akkord und einer zusätzlichen großen None zusammensetzt. Die None liegt eine reine Quinte über der Quinte des Dreiklangs und hat daher die gleiche Kommahöhe wie der Grundton und die Quinte. Dieser Akkord entspricht dem Verhältnis 4 : 5 : 6 : 9 in Dur und 20 : 24 : 30 : 45 in Moll. Wir stellen fest, dass die kleine Sekunde zwischen der großen None und der Mollterz (plus eine Oktave) ein reiner diatonischer Halbton (15 : 16) ist.

In Abbildung 16 haben wir die obigen Akkorde im Eulerschen Tonnetz eingezeichnet. Dabei markieren wir nicht nur die Eckpunkte, sondern auch alle direkten Kanten zwischen ihnen, da jede Kante für eine Beziehung der Form 2 : 3, 4 : 5 oder 5 : 6 innerhalb des jeweiligen Akkordes steht. Pfeile stehen für die Auflösungstendenz des spannungsreichen Tones.

5.2. Sixte ajoutée

Oft kommt der Subdominantakkord (sowohl in Dur als auch in Moll) zusammen mit der großen Sexte über dem Grundton des Akkords vor (z. B. f : a : c : d in C-Dur oder f : ♭a : c : d in c-Moll), vgl. [4, 9.3].

Im Fall von Dur ist dieser Akkord eine Verschmelzung von zwei Dreiklängen, die sich eine Terz teilen und in der Tonart häufig auftreten (im Beispiel von C-Dur: F-Dur und d-Moll). Dementsprechend verwenden wir die Ecken der benachbarten Dreiecke △▽, um die Stimmung der Einzeltöne abzuleiten (siehe Abbildung 16), und gelangen so zum Verhältnis 12 : 15 : 18 : 20 (f : ♮a : c : ♮d). Liest man diesen Akkord stattdessen als Mollakkord mit Septime (♮d : f : ♮a : c), so ist die Septime (♮d : c) ein syntonisches Komma größer als die pythagoreische, nämlich 5 : 9.

Hier verbirgt sich wieder eine Kommafalle: Wenn auf den Sixte ajoutée die Dominante folgt und die Sexte der Subdominante zur Quinte der Dominante wird (dies sind die gleichen Noten!), so muss die große Sexte beim Harmoniewechsel b-496

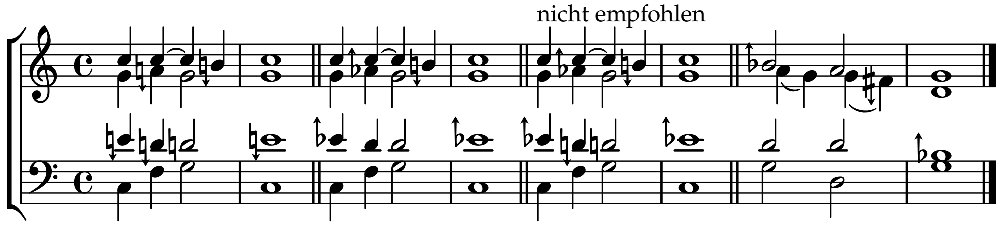



Abbildung 15. Vier Beispiele, darunter der Quartvorhalt, der Nonakkord und der Sixte ajoutée. Der Unterschied zwischen dem zweiten und dem dritten Beispiel ist nur eine einzige Note im Tenor: In der ersten Version wird die von uns vorgeschlagene große Sexte verwendet, in der zweiten Version die ein syntonisches Komma tiefere.

um ein syntonisches Komma nach oben angepasst werden (siehe Abbildung 15). Dies spräche zwar dafür, die Sexte von Anfang an ein Komma höher zu intonieren, allerdings scheint uns die Verschmelzung der zwei Dreiklänge und die dadurch entstehende charakteristische Ambiguität des Vierklangs wichtiger.

In Moll fällt diese Abwägung anders aus, da der Sixte ajoutée in Moll keine Verschmelzung zweier Dreiecke wie oben beschrieben ist. Daher wird in diesem Fall die Sexte verwendet, die auf der gleichen Kommahöhe wie Grundton und Quinte liegt.[6] Der sich daraus ergebende Akkord hat das Verhältnis 80 : 96 : 120 : 135 (f : ♭a : c : d). Die verminderte Quinte (Tritonus) zwischen großer Sexte und kleiner Terz (plus Oktave) beträgt 45 : 64 $\approx$ 609,78 ct. In Moll kann die Quinte des Akkords fehlen (f : ♭a : d). Trotzdem kürzt sich im Verhältnis nichts weg; der Akkord entspricht 80 : 96 : 135.

5.3. Dominantseptakkord

Sehr oft kommt der Dominantakkord zusammen mit der kleinen Septime über dem Grundton des Akkords zusammen vor (z. B. g : h : d : f in C-Dur sowie in c-Moll), vgl. [4, 9.1]. Bei der Frage, wie diese kleine Septime zu intonieren ist, fällt uns zuerst der Vierklang aus Abschnitt 1 ein, der dem Verhältnis 4 : 5 : 6 : 7 entsprach. Wir stellen schnell fest, dass sich dieser Vierklang nicht im Eulerschen Tonnetz wiederfindet, was schlichtweg daran liegt, dass dieses nur Primzahlen bis 5 kennt, vgl. Anhang B. Wir werden in Abschnitt 6 über die Möglichkeit sprechen, diesen Vierklang dennoch zu verwenden, bemerken dabei aber, dass er nur in ganz wenigen Situationen im Kontext klassischer Musik sinnvoll ist.

[6] Nicht nur wird durch diese Syntonisierungswahl die oben genannte Kommafalle umgangen; es wird auch ein melodisches Problem gelöst: Nicht selten wird die Sexte der Subdominante (in c-Moll: d) von der Terz der Tonika (in c-Moll: es) aus erreicht. Nutzte man für die Mollterz ♭3 und für die Sexte ♮6, so entstünde als horizontales Intervall ein großer diatonischer Halbton (25 : 27 $\approx$ 133,24 ct), der wegen seiner ungewöhnlichen Größe suboptimal ist, vgl. Abschnitt 4.1.

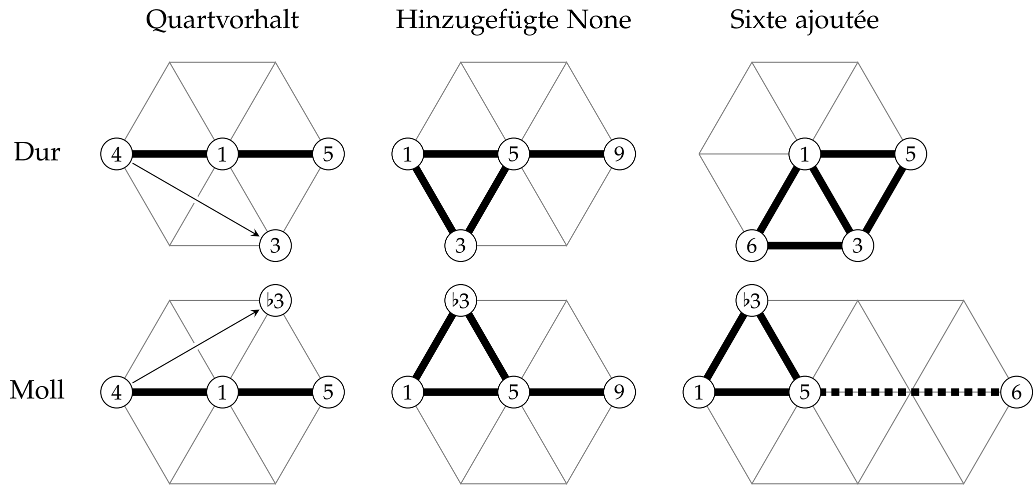


Abbildung 16. Quartvorhalt, erweiterter Nonakkord und Sixte ajoutée in Dur (oben) und Moll (unten), visualisiert als Unterkomplexe des Eulerschen Tonnetzes.

Stattdessen ist eine im Eulerschen Tonnetz beheimatete Intonationsmöglichkeit leichter in einen musikalischen Gesamtkontext zu integrieren: In der Nähe des Dominantakkordes (g : ♮h : d) gibt es im Eulerschen Tonnetz zwar zwei unterschiedliche kleine Septimen (♮f und ♮f), die in Betracht kommen. Allerdings hat die auf der Kommahöhe des Grundtons (♮f) entscheidende Vorteile:

1. Sie kommt auch in anderen Dreiklängen der Tonart (z. B. als Grundton der Subdominante!) vor. Die andere könnte man (mit viel Wohlwollen) vielleicht noch als Terz der Doppeldominantvariante verwenden.

2. Oft bleibt die Septime der Dominante beim Harmoniewechsel $D^7 - T^{4-3}$ liegen und wird zur Quarte der Tonika. Wird hierbei die empfohlene Intonation der Septime verwendet, so ist hierbei keine Anpassung nötig. Gleiches gilt, wenn beim Harmoniewechsel $S - D^7$ der Grundton der Subdominante liegen bleibt und zur Septime der Dominante wird.

3. Taucht die Septime wie in Abbildung 13 als Zwischennote auf, so wird sie ebenfalls pythagoreisch intoniert.

Der so entstehende Vierklang hat das Frequenzverhältnis $36 : 45 : 54 : 64$. Die verminderte Quinte (Tritonus) zwischen der großen Terz und der kleinen Septime ist wieder $45 : 64 \approx 609{,}78$ ct groß. Die Auflösung der Septime der Dominante in die große bzw. kleine Terz der Tonika erfolgt wie beim Quartvorhalt (siehe Abschnitt 5.1) mit einem reinen diatonischen Halbton bzw. einem kleinen Ganzton. In Abbildung 18 findet sich eine Verortung im Tonnetz.

Wir halten abschließend noch fest, dass der Dominantseptakkord auch *verkürzt*, d. h. ohne Grundton (in C-Dur: ♮↓h : d : f) auftauchen kann. Trotzdem kürzt sich im Verhältnis nichts weg; der Akkord entspricht 45 : 54 : 64. Dabei fällt auf, dass sich dieser verminderte Dreiklang aus den gleichen Tönen zusammensetzt wie der Sixte ajoutée ohne Quinte der Mollparallele (in C-Dur entspreche das a-Moll, dessen Subdominante d-Moll ist). Unsere Kommaverteilung liefert allerdings verschiedene Ausstimmungen, wie Tabelle 3 zeigt. Die Intonation hängt also von der Interpretation der Harmonie ab.

Verkürzter Dominantseptakkord (Terz oben):	d	f	♮↓h
Sixte ajoutée der Parallele ohne Quinte (Sexte oben):	♮↓d	f	♮↓h

Tabelle 3. Die Bestandteile zweier sehr ähnlicher Akkorde in C-Dur

5.4. Verminderter Septakkord

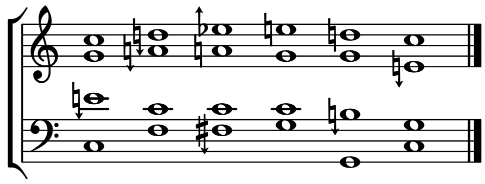
Der verminderte Septakkord, kurz D^v, besteht aus der großen Terz, reinen Quinte, kleinen Septime und kleinen None des Dominantakkordes[7] (z. B. h : d : f : ♭a in C-Dur wie in c-Moll), vgl. [4, 11.1]. Es handelt sich also im Wesentlichen um einen Dominantseptakkord, bei dem der Grundton durch eine kleine None ausgetauscht wird. Es ergibt also Sinn, Terz, Quinte und Septime so wie im vorherigen Abschnitt beschrieben zu intonieren. Für die None kommt in der harmonischen Nähe nur ein Kandidat in Frage, nämlich ♭9. Wird diese None beim Akkordwechsel D^v – t in die Quinte der Tonika geführt, so hat dieser Schritt wieder die Größe 15 : 16.

Insgesamt erhalten wir also in obigem Beispiel ♮↓h : d : f : ♭a, was dem Verhältnis 225 : 270 : 320 : 384 entspricht, siehe auch Abbildung 18, inklusive aller Auflösungsrichtungen. Dieses Verhältnis mag auf den ersten Blick wenig überzeugen, spiegelt aber viele Besonderheiten dieses Vierklangs wider:

1. Der verminderte Septakkord enthält zwei Tritoni und ist vom Wesen her eine Dominante mit zusätzlichen Strebetönen (hin zu Terz und Quinte der Tonika); es ist also gar nicht zu erwarten, dass er stabil klingt. (In Bachs Musiksprache tritt er an besonders schmerzvollen und dramatischen Stellen auf.)

2. Die None liegt eine reine kleine Terz über der Septime (so wie auch die Terz eine reine kleine Terz unter der Quinte ist) und bildet zur Quinte den gleichen Tritonus, den auch die Septime zur Terz bildet. Der Akkord ist also

[7] Wie jede Variation der Dominante kann dies auch bei einer Zwischendominante auftreten.



b-6v7

Abbildung 17. Eine für die Wiener Klassik nicht unübliche Akkordfolge, die den großen diatonischen Halbton zwischen ♮d und ♭e rechtfertigt.

in symmetrischen Terzen geschichtet: Terz zu Quinte 5 : 6, Quinte zu Septime 27 : 32 und Septime zu None 5 : 6.

3. In [5, S. 92ff.] wird der verminderte Septakkord beschrieben als Verschmelzung zweier (unvollständiger) Funktionen: Er enthält den Grundton und die kleine Terz der Mollsubdominante (hier: f und ♭a) sowie die große Terz und die Quinte der Dominante (hier: h und d). Unsere Verortung dieser Töne im Eulerschen Tonnetz ist im Einklang mit dieser Beschreibung.

Wir geben in Abbildung 17 ein Beispiel einer Akkordfolge, bei der die Sexte des Sixte ajoutée ausnahmsweise mit einem großen diatonischen Halbton (25 : 27) in die kleine None des Verminderten Septakkords der Doppeldominante geführt wird. (Um die Chromatik noch etwas mehr auszukosten, führen wir die Linie weiter in einen Dur-Quartsextvorhalt. Dies würde bei Bach nicht passieren, weil die None abwärts geführt werden müsste, ist aber bei Mozart eine durchaus übliche Abfolge.)

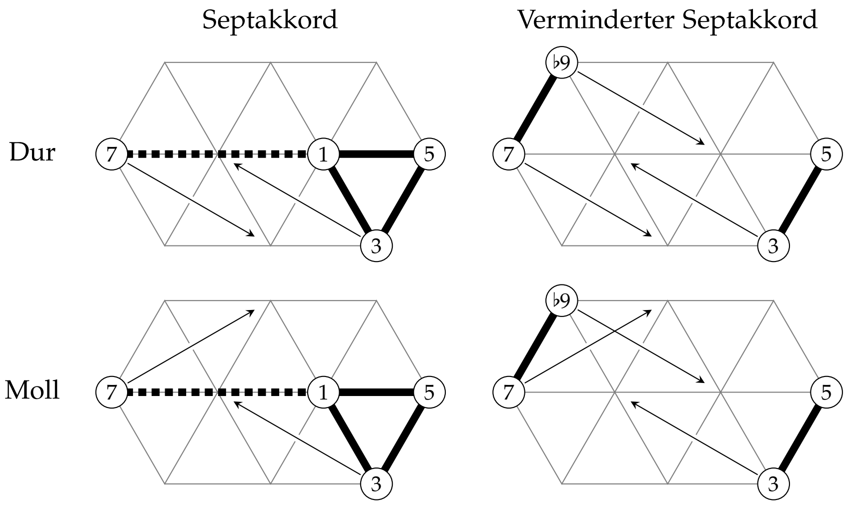


Abbildung 18. Dominantseptakkord und verminderter Septakkord, eingezeichnet im Eulerschen Tonnetz. Die Pfeile zeigen die Auflösungsrichtung der einzelnen Töne an.

5.5. Septnonakkord

Der Dominantseptnonakkord in Dur ist ein Vierklang, der entsteht, indem dem Dominantseptakkord die (skaleneigene) große None hinzugefügt und der Grundton ausgelassen wird (in ♭E-Dur: d : f : ♭a : c), vgl. [4, 11.3]. Da alle Bestandteile bis auf die None bereits in Abschnitt 5.3 besprochen wurden, bleibt nur die Stimmung der None zu klären. Die None ist entweder als große Terz über der Septime oder als Quinte über der Quinte (und damit pythagoreische None über dem Grundton) interpretierbar. Zweiteres ist aus folgenden Gründen sinnvoller:

1. Diese None ist verträglich mit der aus Abschnitt 5.1.
2. Die Septime im Dominantakkord ist ein spannungsreicher Ton. Ein zu ihr reines Intervall erzeugt weniger Konsonanz als eines zur reinen Quinte.
3. Die Auflösung der None erfolgt mit einem Ganzton abwärts in den Grundton der Tonika; hierbei ist der große, pythagoreische Ganzton (8 : 9) dem kleinen Ganzton (9 : 10) melodisch vorzuziehen, siehe Abschnitt 4.

Der Dominantseptnonakkord entspricht also dem Verhältnis 45 : 54 : 64 : 81 (in ♭E-Dur: ♮d : f : ♭a : c) und lässt sich im Eulerschen Tonnetz wie in Abbildung 19 zeichnen. Der einzige Nachteil dieser Ausstimmung ist, dass, wenn z. B. die Terz der Subdominante vorher erklingt, liegen bleibt und zur None wird, eine Syntonisierungsanpassung nötig wird (siehe Abbildung 20).

Wir merken an, dass unter Verwendung der Primzahl 7 auch die Ausstimmung 5 : 6 : 7 : 9 in Betracht kommt. Wie schon beim Dominantseptakkord ist dieses Verhältnis im Kontext klassischer Musik aber meistens unbrauchbar. Wir klammern diese Möglichkeit hier also aus und verweisen wieder auf Abschnitt 6.

Abschließend weisen wir noch auf eine Besonderheit des Dominantseptnonakkords hin: Er setzt sich aus den gleichen Tönen zusammen wie der Sixte ajoutée der Mollparallele (in ♭E-Dur: f : ♭a : c : d), vgl. Abschnitt 5.2. Weil diese Noten sogar enharmonisch identisch sind, werden sie pythagoreisch gleich intoniert. Unsere Kommaverteilung liefert allerdings verschiedene Ausstimmungen, wie Tabelle 4 zeigt. Wie wir sehen, teilen sie sich den Tritonus ♮d : ♭a, doch die Quinten f : c und ♮f : ♮c unterscheiden sich um ein Komma.

Dominantseptnonakkord (Terz oben):	f	♭a	c	♮d
Sixte ajoutée der Parallele (Sexte oben):	♮f	♭a	♮c	♮d

Tabelle 4. Die Bestandteile zweier sehr ähnlicher Akkorde in ♭E-Dur

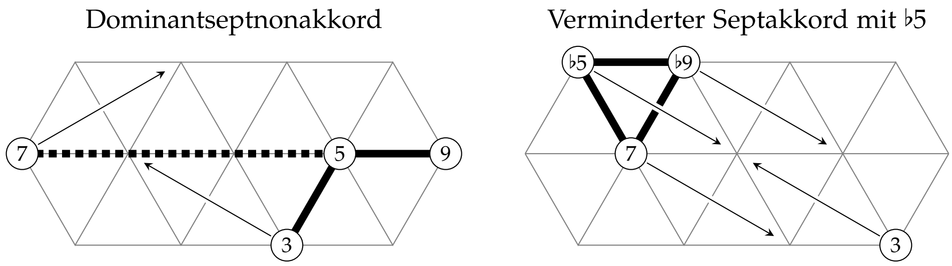


Abbildung 19. Dominantseptnonakkord und verminderter Septakkord mit tiefalterierter Quinte, eingezeichnet im Eulerschen Tonnetz, mit charakteristischen Auflösungsrichtungen.

5.6. Verminderter Septakkord mit tiefalterierter Quinte

Der letzte Akkord, den wir in diesem Abschnitt behandeln, ist eine spezielle Abwandlung des verminderten Septakkordes (Abschnitt 5.4), die (fast) ausschließlich als Variation der Doppeldominante auftritt: Bei ihr ist die Quinte tiefalteriert (in C-Dur oder c-Moll: ♯f : ♭a : c : ♭e), vgl. [4, 11.2]. Alle Töne werden über einen Halbton zur Dominante aufgelöst: die Terz (♯f) nach oben und die übrigen Töne nach unten.

Wenn wir die Intonation der Terz, Septime und None von Abschnitt 5.4 übernehmen, so gibt es eine unausweichliche Intonation für die tiefalterierte Quinte: auf der gleichen Kommahöhe wie die None, denn dann ist der Durdreiklang aus Quinte, Septime und None rein und alle Töne lösen sich mit einem reinen diatonischen Halbton 15 : 16 auf, vgl. Abbildung 19. In C-Dur (oder c-Moll) ist der Akkord also ♯f : ♭a : c : ♭e, was 225 : 256 : 320 : 384 entspricht. Die verminderte Terz zwischen großer Terz und verminderter Quinte ist 225 : 256 ≈ 223,46 ct groß.

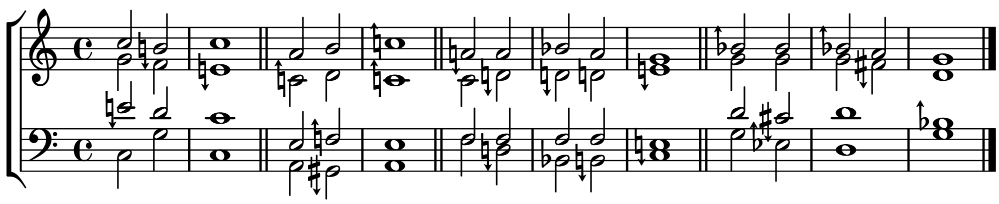
Wir bemerken abschließend, dass dieser Vierklang enharmonisch umgedeutet werden kann zu einem Dominantseptkkord in einer völlig anderen Tonart (im Beispiel: zum Dominantseptakkord in ♭D-Dur). Die darin enthaltene Septime (♭g) ist im Vergleich zur Terz der Doppeldominante (♯f) ein pythagoreisches Komma tiefer und zwei syntonische Kommata höher, insgesamt also etwa 19,55 ct höher.

b-7chords

Abbildung 20. Verschiedene rein gestimmte Septakkorde:
(1) Ein Dominantseptakkord in einer kurzen C-Dur-Kadenz.
(2) Ein verminderter Septakkord der Dominante in einer kurzen a-Moll-Kadenz.
(3) Ein Doppeldominantseptnonakkord in F-Dur.
(4) Ein verminderter Septakkord der 𝔻 mit tiefalterierter Quinte in g-Moll.

6. Naturseptimen

Wir haben noch immer keine Möglichkeit gesehen, die bereits mehrfach erwähnte kleine Septime der Größe $4 : 7 \approx 968{,}83\,\mathrm{ct}$ darzustellen (was wie gesagt daran liegt, dass das Eulersche Tonnetz nur Primzahlen bis 5 kennt, vgl. Anhang B). Dieses Intervall nennen wir *Naturseptime*, da es in der „Naturtonfolge"[8] als erste Septime vorkommt. Sie beträgt 968,83 ct, ist also fast um $^1/_3$ eines gleichstufigen Halbtons kleiner als die gleichstufige kleine Septime und klingt deshalb auch deutlich anders, wie in dem bereits in Abschnitt 1 erwähnten Audiobeispiel nachzuhören ist. m-4567

6.1. Das septimale Komma

Um die Naturseptime in die bestehende Helmholtz-Ellis-Notation zu integrieren, müssen wir ihre Abweichung zur pythagoreischen kleinen Septime betrachten. Hier sehen wir, dass die pythagoreische kleine Septime $9 : 16 = 36 : 64 \approx 996{,}09\,\mathrm{ct}$ um $\frac{64}{63} \approx 27{,}26\,\mathrm{ct}$ größer ist als die Naturseptime. Diesen Unterschied bezeichnen wir als *septimales Komma*.

Die Tiefalteration einer gegebenen Note um ein septimales Komma notieren wir wie in [8] mit dem Symbol ↓. Dieses wird wie ein Versetzungszeichen gebraucht. Hat die zu modifizierende Note bereits ein Versetzungszeichen, so wird ↓ links von diesem hinzugefügt. So ist zum Beispiel ↓♮↑f ein f, das um ein syntonisches Komma erhöht und um ein septimales Komma gesenkt wurde. Da wir keinen Ton um ein septimales Komma *erhöhen* werden, müssen wir dafür auch kein Zeichen einführen.

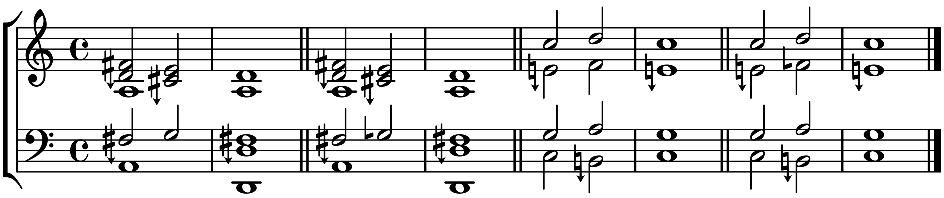

b-harm7

Abbildung 21. (1+2) Eine Schlusskadenz mit Dominantseptakkord; einmal mit pythagoreischer Septime und einmal mit Naturseptime. (3+4) Ein Beispiel mit Septnonakkord, wieder einmal ohne und einmal mit ohne Naturseptime.

6.2. Septakkorde

Bei zwei der in Abschnitt 5 vorgestellten Septakkorden kann es unter Umständen harmonisch sinnvoll sein, sie unter Verwendung der Naturseptime auszustimmen. Dabei müssen wir gar nicht so viel ändern:

[8] Die Naturtonfolge einer gegebenen Grundfrequenz ist gegeben durch ihre positiven ganzzahligen Vielfachen. Das Intervall 4 : 7 ist also das zwischen dem 4. und 7. Naturton.

1. Der Dominantseptakkord (Abschnitt 5.3) bedarf nach dem Absenken der pythagoreischen Septime um ein septimales Komma keiner Anpassung mehr, denn er hat schon das Verhältnis 4 : 5 : 6 : 7. In C-Dur hat dieser Akkord dann die Töne g : ♮↓h : d : ʟf. Die verminderte Quinte ♮↓h : ʟf entspricht 5 : 7 ≈ 582,51 ct. Diese setzt sich aus zwei kleinen Terzen unterschiedlicher Größe zusammen, nämlich 5 : 6 ≈ 315,64 ct (♮↓h : d) und 6 : 7 ≈ 266,87 ct (d : ʟf). Dieser Akkord ist berüchtigt für seine Omnipräsenz im Barbershop-Gesang (wobei dieses Gerücht einer empirischen Untersuchung [1] nur bedingt standhalten kann).

2. Im Dominantseptnonakkord (Abschnitt 5.5) muss ebenfalls lediglich die Septime gesenkt werden; dann entsteht das Verhältnis 5 : 6 : 7 : 9. In C-Dur entspricht dieser Akkord dann ♮↓h : d : ʟf : a. Hier taucht nun eine sehr große große Terz auf, nämlich 7 : 9 ≈ 435,08 ct (ʟf : a).

Wir bemerken, dass die Absenkung der Septime in diesen beiden Akkorden deutlich hörbar ist, weil die Naturseptime wirklich *viel* tiefer als die pythagoreische und erst recht als die mittlerweile wohl sehr gewohnte gleichstufige ist.

6.3. Septimale Schritte

Durch den Einsatz des septimalen Kommas können natürlich auch neue horizontale Intervalle und vor allem interessante bis unbrauchbare Schritte entstehen:

1. *Septimaler (diatonischer) Halbton*
   Wird die Naturseptime des Dominantseptakkords abwärts in die Durterz der Tonika aufgelöst (in C-Dur: ʟf – ♮↓e), so entsteht ein diatonischer Halbton der Größe 20 : 21 ≈ 84,47 ct. Dies ist der kleinste diatonische Halbton, den wir kennen; allerdings ist er größer als der kleine chromatische Halbton.

2. *Kleiner septimaler Ganzton*
   Wird die Naturseptime des Dominantseptakkords abwärts in die Mollterz der Tonika aufgelöst (in c-Moll: ʟf – ♭e), so entsteht ein Ganzton der Größe 32 : 35 ≈ 155,14 ct. Dieser ist extrem klein; er liegt fast in der *Mitte* zwischen einem gleichstufigen Halbton und einem gleichstufigen Ganzton.

3. *Großer septimaler Ganzton*
   Wird die Naturseptime von oben (z. B. vom Grundton der Dominante) aus erreicht (in C-Dur: g – ʟf), so entsteht ein Ganzton der Größe 7 : 8 ≈ 231,17 ct. Dies ist der größte Ganzton, den wir kennen, und für die klassische Musik als Schritt eigentlich unbrauchbar, siehe Abschnitt 6.4.

6.4. Brauchbarkeit

So schön die beiden oben erwähnten Septakkorde mit Naturseptime vertikal und mathematisch sein mögen, so problematisch ist ihr Einsatz im Verlauf eines Stücks. Dies hat im Wesentlichen drei Gründe:

1. Der Einsatz des septimalen Kommas verstärkt in melodisch gedachten Passagen das in Abschnitt 4.4 besprochene Problem unterschiedlich großer Schritte.

2. Septimale Ganztöne sind melodisch sehr unpassend, weil unser Gehör sie nicht einfach als das erkennen kann, was sie sein sollen. Der kleine septimale Ganzton ist so klein, dass er fast einen Viertelton tiefer als der gleichstufige Ganzton und damit weder als Halb- noch als Ganzton erkennbar ist. Der große septimale Ganzton ist 231,17 ct groß, was sehr nah an den 274,58 ct der reinen übermäßigen Sekunde (in a-Moll etwa $\natural$f – $\sharp$g zwischen der Terz von d-Moll und der Terz von E-Dur) liegt.

3. Wenn der häufige Fall auftritt, in der die Auflösung der Septime vorenthalten und ohne Anpassung zum Quartvorhalt wird, ist die entstehende Quarte $16 : 21 \approx 470{,}78$ ct sehr unrein. Es ist dann also unerlässlich, die Tonhöhe um ein septimales Komma nach *oben* anzupassen. Wie schon in Abschnitt 5.1 argumentiert unterminiert dies aber die Idee einer konsonanten Einführung von Vorhaltetönen und sollte daher vermieden werden.

Im Gegensatz zu septimalen Ganztönen ist der septimale Halbton hingegen zwar klein, aber nicht so klein, dass er nicht mehr als solcher erkennbar ist. Die Auflösung der Naturseptime mit diesem Halbton in eine Durterz ist, weil der Schritt kleiner ist als sonst, eventuell etwas spannungsreicher (vergleichbar mit dem höheren Leitton in Abschnitt 4.3, nur von oben und ohne harmonische Abstriche) und deshalb bei eindeutiger Kadenzbildung womöglich sogar willkommen. Wenn wir Naturseptimen einsetzen wollen, sollten also folgende Bedingungen allesamt erfüllt sein:

1. Wir befinden uns in einer eindeutigen vertikal gedachten Kadenz.

2. Die Septime wird durch einen Halbton von unten oder durch einen Sprung erreicht. (Dies heißt, dass die Naturseptime nicht durch einen septimalen Ganzton oder eine septimale Nachjustierung erreicht wird.)

3. Die Septime wird in eine Durterz aufgelöst. (Das heißt, dass durch den Einsatz der Naturseptime bei der Auflösung kein septimaler Ganzton entsteht.)

4. Die Septime wird nicht zu einem Quartvorhalt gehalten.

5. Die zu stimmende Septime befindet sich nicht in der Melodiestimme.

b-bad7

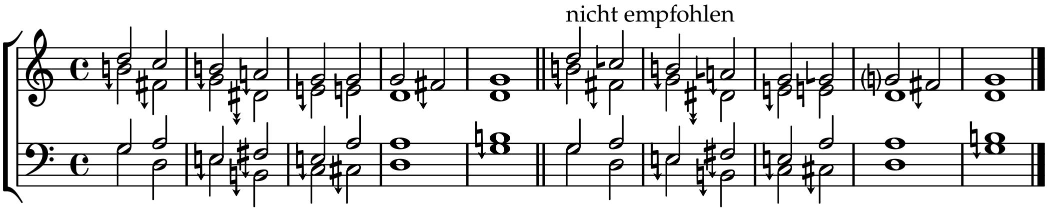


Abbildung 22. (1) Eine einfache Melodie im Sopran, mit vielen Zwischendominanten in den Begleitstimmen. (2) Derselbe Satz mit einigen Naturseptimen und seltsamen Schritten.

Als besonders abschreckendes Beispiel möge Abbildung 22 dienen, wo fast alle diese Regeln missachtet werden. Insgesamt stellen wir also fest, dass es in der klassischen Musik nur sehr wenige Situationen gibt, in denen man den Einsatz der Naturseptime erwägen könnte. Es wird wohl nicht wenige Musiker:innen geben, die von ihrer Verwendung im klassischen Kontext komplett abraten.

A. Das kleinste gemeinsame Vielfache als Maß

Wir wollen die *Konsonanz* eines gegebenen Akkords noch besser quantifizieren, denn bisher ist unser einziges qualitatives Maß „kleine ganzzahlige Verhältnisse". Folgen wir Helmholtz' Schwebungstheorie [2, § 10–12], so sollte Konsonanz quantitativ ausgedrückt werden durch die Menge an Überschneidungen der Obertonspektren der gegebenen Töne. Für eine gegebene Frequenz $f \in \mathbb{R}_{>0}$ ist sein Obertonspektrum die Menge aller Töne der Naturtonreihe, also alle positiven ganzzahligen Vielfachen von f:

$$\mathrm{Spek}(f) := \{n \cdot f;\, n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \subset \mathbb{R}_{>0}.$$

Haben wir also einen Akkord, der dem Zahlenverhältnis $k_1 : \cdots : k_r$ entspricht, so heißt dies, dass es eine Grundfrequenz f_0 (auch *imaginierter Grundton* genannt) gibt, für die die Töne des vorliegenden Akkords genau $k_1 \cdot f_0, \ldots, k_r \cdot f_0$ sind. Der Schnitt ihrer Obertonspektren ist also gegeben durch

$$\mathrm{Spek}(k_1 \cdot f_0) \cap \cdots \cap \mathrm{Spek}(k_r \cdot f_0)$$

und unendlich groß: Es enthält genau die Vielfachen von $\mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_r) \cdot f_0$, wobei kgV das kleinste gemeinsame Vielfache bezeichnet. Wir können also nicht einfach zählen, wie viele Überschneidungen es gibt. Stattdessen können wir schauen, wie *dicht* dieser Schnitt ist; d. h. die Menge der Überschneidungen ist größer, wenn die Schrittweite $\mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_r) \cdot f_0$ möglichst klein ist. Dies kann natürlich leicht

AKKORD	VERHÄLTNIS	KGV
Quartvorhalt	6 : 8 : 9	72
pythagoreischer Durdreiklang	64 : 81 : 96	5.184
pythagoreischer Molldreiklang	54 : 64 : 81	5.184
Durdreiklang	4 : 5 : 6	60
Molldreiklang	10 : 12 : 15	60
Erweiterter Nonakkord (Dur)	4 : 5 : 6 : 9	180
Erweiterer Nonakkord (Moll)	20 : 24 : 30 : 45	360
Sixte ajoutée (Dur)	12 : 15 : 18 : 20	180
Septakkord	36 : 45 : 54 : 64	8.640
Septnonakkord	45 : 54 : 64 : 81	25.920
Septakkord mit Naturseptime	4 : 5 : 6 : 7	420
Septnonakkord mit Naturseptime	5 : 6 : 7 : 9	630

Tabelle 5. Einige im Skript besprochene Akkorde und das kgV ihrer Faktoren. Im ersten Block verwenden wir nur die pythagoreische Stimmung; im zweiten das Tonnetz und im dritten zusätzlich noch die Naturseptime.

erreicht werden, indem man den Akkord sehr tief spielt und dadurch f_0 sehr klein macht. Allerdings sollte unser Maß für Konsonanz *translationsinvariant* sein, also nicht von der Höhe, in der der Akkord gespielt wird, abhängen (z. B. sollen $\mathrm{c}' : \natural_{\downarrow}\mathrm{e}' : \mathrm{g}'$ und $\mathrm{c}'' : \natural_{\downarrow}\mathrm{e}'' : \mathrm{g}''$ gleich konsonant sein). Weil Translation den imaginierten Grundton f_0 verschiebt, aber das kgV invariant lässt, scheint uns also das kleinste gemeinsame Vielfache der am Verhältnis beteiligten Töne ein geeignetes Maß für Konsonanz zu sein, und je kleiner diese Zahl ist, desto konsonanter der Akkord. Ähnliche Überlegungen, bei denen die Konsonanz in Abhängigkeit des kgV ausgedrückt wird, finden sich bereits bei Euler [3].

Berechnen wir für einige im Skript vorgestellten Akkorde das kleinste gemeinsame Vielfache ihrer Faktoren, so ergibt sich Tabelle 5. Hierbei fällt ins Auge, dass die kgV von Dur- und Molldreiklängen (sowohl pythagoreisch als auch im Tonnetz) gleich sind. Dies ist kein Zufall: Diese Akkorde stimmen bis auf vertikale Spiegelung überein. Auf der Ebene von Frequenzverhältnisse schickt vertikale Spiegelung $k_1 : \cdots : k_r$ auf das ebenfalls gekürzte Verhältnis $k'_r : \cdots : k'_1$, wobei

$$k'_i = \frac{\mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_r)}{k_i}$$

gilt. Es ist nun eine einfache mathematische Überlegung,[9] dass die so berechneten $k'_1, \dots, k'_r$ dasselbe kgV haben.

Abschließend sehen wir, dass „kleine Zahlen" trügerisch sein können: Nutzte man im Mollakkord die „septimale kleine Terz" 6 : 7, so entstünde der Dreiklang 6 : 7 : 9, der zwar übersichtlicher als 10 : 12 : 15 ist, allerdings ein kgV von 126 hat.

B. Primzahlen

Blicken darauf zurück, in welcher Reihenfolge wir unseren Tonvorrat schrittweise erweitert haben, so bemerken wir, dass in jedem Schritt die nächstgrößere Primzahl ins Spiel gekommen ist. Um dies präzise zu machen, fixieren wir die Frequenz f_K des Kammertons a′ (z. B. 440 Hz) und nennen für einen Ton mit Frequenz f den Quotienten f/f_K den *Faktor* des Tons. Dann sehen wir folgendes:

2. Für jede Oktavierung des Kammertons gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $a_1 \in \mathbb{Z}$, für die der Faktor des gegebenen Tons genau 2^{a_1} beträgt. Mathematisch gesprochen definiert $a_1 \mapsto 2^{a_1}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}$ und den Faktoren der Oktavierungen des Kammertons.

3. Für jeden Ton in pythagoreischer Stimmung gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, für die der Faktor des gegebenen Tons genau $2^{a_1} \cdot 3^{a_2}$ beträgt. Mathematisch gesprochen definiert $(a_1, a_2) \mapsto 2^{a_1} \cdot 3^{a_2}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}^2$ und den Faktoren der Töne in pythagoreischer Stimmung.[10]

5. Für jeden Ton im Eulerschen Tonnetz (zusammen mit einer Oktavlage, z. B. ♭a′) gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$, für die der Faktor des gegebenen Tons genau $2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$ beträgt. Mathematisch gesprochen definiert $(a_1, a_2, a_3) \mapsto 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}^3$ und den Faktoren der Töne im Eulerschen Tonnetz.[11]

7. Das septimale Kommas bringt die Primzahl 7 ins Spiel. Wir haben in Abschnitt 6 nur die 0- oder (-1)-fache Anwendung des Kommas eingeführt. Würde man dies für jede ganze Zahl a_4 tun, so ergäbe sich ein 4-dimensionales Gitter an Tönen, das durch $(a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4}$ parametrisiert ist.

[9] Seien $c := \mathrm{kgV}(k_1, \dots, k_r)$ und $c' := \mathrm{kgV}(k'_1, \dots, k'_r)$. Zunächst bemerken wir, dass auch $k'_1 : \dots : k'_r$ vollständig gekürzt ist, denn falls ein $d > 1$ alle k'_i teilte, so wäre $k'_i/d \cdot k_i = c/d < c$ ein kleineres gemeinsames Vielfaches von $k_1, \dots, k_r$, Widerspruch. Ferner ist c ein Vielfaches von allen $k'_i = c/k_i$, weswegen $c' \mid c$ gilt. Daher gibt es ein $l \geqslant 1$ mit $c = l \cdot c'$, und wir sehen $k_i = c/k'_i = l \cdot c'/k'_i$. Also sind alle k_i durch l teilbar. Weil $k_1 : \dots : k_r$ vollständig gekürzt war, folgt $l = 1$ und $c = c'$.

[10] Dass die Quintenspirale selbst 1-dimensional ist, liegt daran, dass wir aus ihr die Oktave „rausgerechnet" haben, also z. B. nicht zwischen ♭a und ♭a′ unterscheiden.

[11] Dass das Tonnetz selbst 2-dimensional ist, liegt wieder daran, dass wir aus ihm die Oktave „rausgerechnet" haben, also z. B. nicht zwischen ♮a und ♮a′ unterscheiden.

Allgemein bezeichnen wir eine Menge $T \subset \mathbb{Q}_{>0}$ von positiven Brüchen als *rationalen Tonvorrat*. Unabhängig davon, wie wir bestimmte Töne nennen, kann man für ein gegebenes Stück mathematisch beschreiben, welcher rationale Tonvorrat verwendet wird. Sei p eine Primzahl und seien $p_1 < \cdots < p_r = p$ alle Primzahlen bis p. Dann ist der *durch p begrenzte* Tonvorrat (engl. „p-limit tuning") definiert als

$$T_p := \{p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r};\, a_i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}_{>0}.$$

Wir bemerken, dass $(a_1, \ldots, a_r) \mapsto p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}^r$ und T_p ist, sodass wir die Töne in T_p in einem r-dimensionalen Gitter anordnen können. Ferner sind im durch p begrenzten Tonvorrat alle auftretenden Frequenzverhältnisse zwischen s gegebenen Tönen der Form

$$p_1^{a_{11}} \cdots p_r^{a_{r1}} : \cdots : p_1^{a_{1s}} \cdots p_r^{a_{rs}},$$

wobei wir durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erreichen können, dass $a_{ij} \geqslant 0$ gilt. Ein Verhältnis von s Tönen ist also beschrieben durch eine $(r \times s)$-Matrix mit nicht-negativen ganzzahligen Einträgen.[12] Dies erklärt zum Beispiel, warum das Verhältnis 4 : 7 im Eulerschen Tonnetz nicht auftreten kann.

Der für klassische Musik geeignete ist im Wesentlichen der durch 5 begrenzte Tonvorrat T_5, mit vereinzelten, in Abschnitt 6 vorgestellten, Ausnahmen, in denen man einen Schritt nach T_7 erwägen kann. Dies macht natürlich die daruffolgenden Primzahlen und die durch sie beschreibbaren Tonvorräte nicht weniger interessant. Zum einen gibt es für jede Primzahl p ein entsprechendes Komma, um sie in unser Notensystem zu integrieren. Für viele davon wurden in [8] Glyphen entworfen, die ähnlich wie die vorgestelle Helmholtz-Ellis-Notation fortsetzen. Zum anderen wurde in den zurückliegenden Jahrzehnten eine ganze Reihe sogenannter „mikrotonaler Musik" geschrieben, die auf einen durch eine große Primzahl (z. B. 67) begrenzten Tonvorrat zurückgreift, z. B. [6].

Literatur

[1] B. Hagerman und J. Sundberg. „Fundamental frequency adjustment in barbershop singing". In: *Speech Transmission Laboratory. Quarterly Progress and Status Reports* 21 (1 1980), S. 28–42.

[2] H. L. F. von Helmholtz. *On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music*. London, New York: Longmans, Green, und Co., 1895.

[12] Gekürzt ist das Verhältnis genau dann, wenn es für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ ein $1 \leqslant j \leqslant s$ gibt mit $a_{ij} = 0$, also wenn in jeder Zeile der Matrix eine 0 auftaucht.

[3] E. Knobloch. „Euler Transgressing Limits: The Infinite and Music Theory". In: *Quaderns d'història de l'enginyeria* IX (2008), S. 9–24.

[4] F. Kranhold und C. Mertz. *Musiktheorie. Das Kurzkurskurzskript*. 2022.

[5] D. de la Motte. *Harmonielehre*. Kassel: Bärenreiter, 1976.

[6] S. Nicholson. *Sieve of Eratosthenes. For two pianos in 67-limit just intonation*. 2023. URL: https://youtube.com/watch?v=Ofg8fG-1iJA (besucht am 01. 03. 2024).

[7] M. Ravvina. „Intonationsbewusstes Singen in der Mehrstimmigkeit". Masterarbeit. Hochschule für Musik, Theater und Medien Hannover, 2023.

[8] M. Sabat und W. von Schweinitz. *The Extended Helmholtz–Ellis JI Pitch Notation*. 2004. URL: https://marsbat.space/pdfs/notation.pdf (besucht am 01. 03. 2024).

[9] M. Viitasaari. „How to deal with the syntonic comma in music education? Recognition, preferences of usage, and utility". Dissertation. University of Oulu, 2020.