Aufgaben zur Kategorientheorie

Florian Kranhold

9. Januar 2024

A. Kategorien

Aufgabe A.1. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ heißt *Monomorphismus*, wenn für Morphismen $h, h'\colon W \to X$ folgende Implikation gilt:

$$f \circ h = f \circ h' \implies h = h'.$$

(a) Zeige, dass in der Kategorie der Mengen die Monomorphismen genau die injektiven Abbildungen sind.

(b) Sei $g\colon Y \to Z$ ein weiterer Morphismus und sei vorausgesetzt. dass $g \circ f$ ein Monomorphismus ist. Zeige, dass dann f selbst ein Monomorphismus ist.

Aufgabe A.2. Wir nennen einen Morphismus $f\colon X \to Y$ *rechtsinvertierbar*, wenn es einen Morphismus $g\colon Y \to X$, genannt *Schnitt*, gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

(a) Zeige, dass in der Kategorie der Mengen die rechtsinvertierbaren Morphismen genau die surjektiven Abbildungen sind. (*Bonus:* Zeige, dass eine vergleichbare Aussage in der Kategorie der Gruppen nicht stimmt.)

(b) Zeige, dass jeder Isomorphismus sowohl ein Monomorphismus als auch rechtsinvertierbar ist.

(c) Zeige umgekehrt, dass ein rechtsinvertierbarer Monomorphismus schon ein Isomorphismus ist, und dass jeder Schnitt die eindeutige Inverse sein muss.

Aufgabe A.3. Sei $\mathbf{C}$ eine (lokal kleine) Kategorie und sei $\phi\colon X \to Y$ ein Isomorphismus in $\mathbf{C}$. Zeige, dass durch die Abbildung

$$\phi_\#\colon \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(Y), \quad f \mapsto \phi \circ f \circ \phi^{-1}$$

ein Isomorphismus von Automorphismengruppen beschrieben wird.

B. Funktoren

Aufgabe B.1. Seien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ lokal kleine Kategorien und sei $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor. Zeige, dass für jedes Objekt X in $\mathbf{C}$ folgende Abbildung ein Homomorphismus ist:

$$F\colon \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{D}}(FX), \quad f \mapsto Ff.$$

Aufgabe B.2. Sei $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ volltreu und seien $X, X' \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$. Zeige:

(a) Falls $f\colon X \to X'$ ein Morphismus ist, für den $Ff\colon FX \to FX'$ ein Isomorphismus ist, so ist auch f selbst ein Isomorphismus.

(b) Falls $FX \cong FX'$ gilt, so gilt auch $X \cong X'$.

Aufgabe B.3. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie und sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathbf{C}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist ein Isomorphismus.

(ii) Für alle Objekte A ist die Abbildung $f_*\colon \mathbf{C}(A, X) \to \mathbf{C}(A, Y)$ bijektiv.

(iii) Für alle Objekte A ist die Abbildung $f^*\colon \mathbf{C}(Y, A) \to \mathbf{C}(X, A)$ bijektiv.

C. Natürliche Transformationen

Aufgabe C.1. Seien $\phi, \psi\colon G \to H$ zwei Homomorphismen von Gruppen. Gib eine Beschreibung aller natürlichen Transformationen $\mathrm{B}\phi \Rightarrow \mathrm{B}\psi$ in der Sprache der Gruppentheorie (ähnlich wie in Beispiel 2.3.3:2 für $\mathrm{N}f \Rightarrow \mathrm{N}g$ getan).

Aufgabe C.2. Sei $\mathbf{I}$ die Kategorie mit Objekten 0 und 1, und einem nicht-trivialen Morphismus $0 \to 1$, genannt *Intervall*. Zeige, dass für Funktoren $F, G\colon \mathbf{C} \rightrightarrows \mathbf{D}$ eine natürliche Transformation $\theta\colon F \Rightarrow G$ dasselbe ist wie ein Funktor $H\colon \mathbf{I} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ mit $H(0, -) = F$ und $H(1, -) = G$.

Aufgabe C.3. Seien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ zwei Kategorien. Wir nennen einen Funktor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *wesentlich surjektiv*, wenn es für jedes $Y \in \mathrm{ob}(\mathbf{D})$ ein $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ gibt mit $FX \cong Y$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) F ist volltreu und wesentlich surjektiv.

(ii) Es gibt einen Funktor $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ und natürliche Isomorphismen $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow GF$ und $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$.

In diesem Fall nennen wir die Kategorien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ *äquivalent*.

(*Hinweis:* Zeige, dass ε so gewählt werden kann, dass $\varepsilon_{FX} \circ F\eta_X = \mathrm{id}_{FX}$ gilt.)

D. Das Yoneda-Lemma

Aufgabe D.1. Zeige Aufgabe B.3 nochmal, diesmal unter Verwendung der Yoneda-Einbettung (einschließlich der Version von Bemerkung 2.4.4).

Aufgabe D.2. Nutze das Yoneda-Lemma, um den Satz von Cayley zu zeigen: *Jede Gruppe ist Untergruppe einer symmetrischen Gruppe*.

E. Limites und Kolimites

Aufgabe E.1. Sei J eine Indexkategorie, die ein terminales Objekt $*$ hat, und für jedes Objekt j sei $\varepsilon_j \colon j \to *$ der eindeutige Morphismus. Zeige, dass alle Diagramme $D\colon J \to \mathbf{C}$ einen Kolimes besitzen, der gegeben ist durch $(D*, D\varepsilon_\bullet)$.

Aufgabe E.2. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie mit terminalem Objekt $*$. Zeige, dass für jedes Objekt X das Produkt $X \times *$ gegeben ist durch X selbst, mit den beiden Projektionen $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ und dem terminalen Morphismus $\varepsilon_X \colon X \to *$. Formuliere und beweise die duale Aussage für $X \sqcup \varnothing$.

Aufgabe E.3. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie. Ein *paralleles Paar* ist ein Diagramm der Form $(\bullet \rightrightarrows \bullet)$, also gegeben durch zwei Morphismen $a, a' \colon X \to Y$.

(a) Zeige, dass ein Kegel über einem parallelen Paar das gleiche ist wie ein Morphismus $\mu\colon M \to X$, der $a \circ \mu = a' \circ \mu$ erfüllt.

(b) Sei $\pi\colon E \to X$ ein Limes über obigen parallelen Paar, genannt *Egalisator* von a und a'. Zeige, dass π ein Monomorphismus wie in Aufgabe A.1 ist.

(c) Sei $\phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Finde eine explizite Konstruktion für den Egalisator von ϕ und dem trivialen Morphismus $0\colon G \to H$.

Aufgabe E.4 (Klebelemma)**.** Betrachte folgendes kommutatives Diagramm in $\mathbf{C}$:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \\ X'_0 \arrow[r] & X'_1 \arrow[r] & X'_2 \end{tikzcd}$$

(a) Zeige: Wenn die beiden kleinen Quadrate kokartesisch sind, so ist auch das große Rechteck kokartesisch.

(b) Zeige: Wenn das große Rechteck sowie das linke Quadrat kokartesisch sind, so ist auch das rechte Quadrat kokartesisch.

F. Adjunktionen

Aufgabe F.1. Sei $F\colon \mathbf{C} \leftrightarrows \mathbf{D} : G$ ein Paar adjungierter Funktoren und seien η und ε die Einheit und Koeinheit der Adjunktion. Zeige wie in Beweis von Konstruktion 3.2.5, dass auch die zweite Dreiecksungleichung $G\varepsilon_Y \circ \eta_{GY} = \mathrm{id}_{GY}$ erfüllt ist.

Aufgabe F.2. Beweise Proposition 3.2.9 über die Eindeutigkeit von Adjungierten.

Aufgabe F.3. Sei J eine Indexkategorie und $\mathbf{C}$ eine J-vollständige Kategorie. Zeige, was in Beispiel 3.2.4 behauptet wird, nämlich dass ein Limesfunktor $\lim\colon [J, \mathbf{C}] \to \mathbf{C}$ stets rechtsadjungiert ist zu dem Funktor $\Delta\colon \mathbf{C} \to [J, \mathbf{C}]$, der jedem Objekt das konstante Diagram zuweist.

Aufgabe F.4. Wir betrachten die Inklusion geordneter Mengen $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Der induzierte Funktor $\mathrm{N}\mathbb{Z} \to \mathrm{N}\mathbb{R}$ hat sowohl einen Rechts- als auch einen Linksadjungierten. Wie sehen sie aus?

Aufgabe F.5. Sei $F\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ ein Paar adjungierter Funktoren und seien η und ε Einheit und Koeinheit der Adjunktion. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Jedes ε_Y ist ein Isomorphismus.

(ii) Der Funktor G ist volltreu.

Schaue für die uns bekannten Funktoren, ob in diesen Fällen die beiden Aussagen gelten oder nicht.

G. Monoidales

Aufgabe G.1. Überzeuge Dich von Proposition 4.2.3.

Aufgabe G.2. Prüfe, dass Konstruktion 4.2.7 valide ist. Zeige also:

(a) Für jedes Objekt X ist (TX, μ_X) eine T-Algebra.

(b) Für jeden Morphismus $f\colon X \to Y$ ist Tf ein Morphismus von T-Algebren.

(c) Die Konstruktionen $(-)^\sharp$ und $(-)^\flat$ sind zueinander invers und erfüllen die Identitäten aus Proposition 3.2.2.

(d) Es gilt $\mathrm{id}^\flat_{F^T X} = \eta_X$ und $U^T(\mathrm{id}^\sharp_{U^T F^T X}) = \mu$.