Kategorientheorie

CdE-WinterAkademie 2023/24

Florian Kranhold

4. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1.

Geschichten aus dem Leben

Les mathématiciens n'étudient pas des objets,
mais des relations entre les objets.
HENRI POINCARÉ (1854–1912)

Die Kategorientheorie vereinheitlicht Methoden aus sehr unterschiedlichen Bereichen der reinen Mathematik. Deswegen wollen wir zuerst in einige dieser Bereiche „hineinschauen" und ihren gemeinsamen Nenner herausstellen. Dies kann freilich nur schemenhaft geschehen, aber wir wollen uns zumindest die Zeit nehmen, ein Beispiel – nämlich die Gruppentheorie – sorgfältig zu betrachten.

1.1. Ein ausführliches Beispiel: Gruppen

Definition 1.1.1. Eine *Gruppe* ist eine Menge G, zusammen mit einer Verknüpfung $G \times G \to G, (g, g') \mapsto g * g'$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. ASSOZIATIVITÄT. Für alle $g, g', g'' \in G$ gilt $(g * g') * g'' = g * (g' * g'')$.
2. UNITALITÄT. Es gibt ein $1 \in G$ mit $g * 1 = g = 1 * g$. Wir nennen dann 1 ein *neutrales Element*.
3. INVERTIERBARKEIT. Für jedes $g \in G$ gibt es ein $h \in G$ mit $g * h = 1 = h * g$. Wir nenen h ein *zu g inverses Element*.

Wir nennen eine Gruppe *abelsch*, wenn zusätzlich folgendes gilt:

4. KOMMUTATIVITÄT. Für alle $g, g' \in G$ gilt $g * g' = g' * g$.

Je nach Kontext schreiben wir die Verknüpfung auch als „+" oder „·", oder lassen sie, wie einen Malpunkt, auch ganz weg.

Proposition 1.1.2. *Neutrale und inverse Elemente sind eindeutig.*

Beweis. Seien $1, 1' \in G$ zwei neutrale Elemente. Dann gilt $1 = 1 * 1' = 1'$. Sei ferner $g \in G$ und seien $h, h' \in G$ zwei zu g inverse Elemente. Dann gilt schon

$$h = h * 1 = h * (g * h') = (h * g) * h' = 1 * h' = h'. \qquad \square$$

Beispiel 1.1.3.

1. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ bilden bezüglich der Addition eine Gruppe; das neutrale Element ist 0.

2. Für jede natürliche Zahl n wird die Menge $\mathbb{Z}_n = \{\underline{0}, \dots, \underline{n-1}\}$ durch

$$\underline{k} + \underline{k'} := \underline{k + k' \mod n}$$

zu einer Gruppe, die wir die *nte*[1] *Restklassengruppe* nennen. Das neutrale Element ist $\underline{0}$ und das Inverse von $\underline{k}$ ist $\underline{n-k}$.

3. Für jede natürliche Zahl n wird die Teilmenge der komplexen Zahlen

$$C_n := \{z \in \mathbb{C};\, z^n = 1\} = \{e^{\frac{2\pi k i}{n}};\, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

zusammen mit der komplexen Multiplikation zu einer Gruppe, die wir *nte Einheitswurzelgruppe* nennen, siehe Abbildung 1.1. Das neutrale Element ist die komplexe $1 = e^0$ und das Inverse von z ist das komplex konjugierte $\bar{z}$.

4. Für jede Menge X wird die Menge $\mathfrak{S}(X)$ aller bijektiven Selbstabbildungen $f\colon X \to X$ durch die Verkettung von Abbildungen $(g, f) \mapsto g \circ f$ zu einer Gruppe. Das neutrale Element ist die Identitätsabbildung id_X mit $\mathrm{id}_X(x) = x$ und das zu f inverse Element ist die Umkehrfunktion f^{-1}. Für eine natürliche Zahl n nennen wir $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(\{1, \dots, n\})$ auch die *nte symmetrische Gruppe*.

5. Für einen Körper $\mathbb{K}$ und eine natürliche Zahl n ist die Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ aller invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{K}$ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix.

Als nächstes möchten wir zwei gegebene Gruppen vergleichen können. Dies geschieht, indem wir Abbildungen zwischen ihnen betrachten, die „kompatibel“ mit der Gruppenstruktur sind.

Definition 1.1.4. Eine Abbildung $\phi\colon G \to H$ zwischen zwei Gruppen heißt *Homomorphismus*, falls $\phi(g * g') = \phi(g) * \phi(g')$ für alle $g, g' \in G$ gilt.

[1] Höhö, *Ente*.

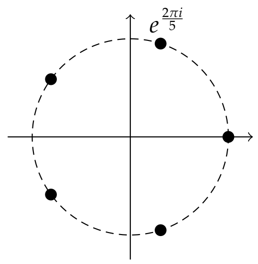


Abbildung 1.1. Die Einheitswurzelgruppe C_5 als Teilmenge der komplexen Ebene.

Beispiel 1.1.5.

1. Für jede Gruppe $(G, *)$ ist die Identitätsabbildung id_G ein Homomorphismus.
2. Für jede ganze Zahl n ist die Abbildung $\mu_n \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $\mu_n(k) = n \cdot k$ ein Homomorphismus, denn es gilt
$$\mu_n(k + k') = n \cdot (k + k') = n \cdot k + n \cdot k' = \mu_n(k) + \mu_n(k').$$
3. Für jede natürliche Zahl n haben wir einen Homomorphismus $\phi_n \colon \mathbb{Z}_n \to C_n$ mit $\phi_n(\underline{k}) = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$: Wir erinnern uns, dass $\underline{k} + \underline{k'} = \underline{k + k' \mod n}$. Schreiben wir $r := k + k' \mod n$, dann gibt es $s \in \mathbb{Z}$ mit $r + sn = k + k'$, also
$$\phi_n(\underline{k} + \underline{k'}) = e^{\frac{2\pi i r}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot (k + k' - sn)} = e^{\frac{2\pi i k}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi i k'}{n}} = \phi_n(\underline{k}) \cdot \phi_n(\underline{k'}).$$
4. Für jede ganze Zahl m und $z \in C_n$ gilt $(z^m)^n = (z^n)^m = 1^m = 1$, also $z^m \in C_n$. Ferner ist $\psi_m \colon C_n \to C_n$ mit $\psi_m(z) = z^m$ ein Homomorphismus, denn es gilt
$$\psi_m(z \cdot z') = (z \cdot z')^m = z^m \cdot z'^m = \psi_m(z) \cdot \psi_m(z').$$

Proposition 1.1.6. *Sind $\phi \colon G \to H$ und $\psi \colon H \to F$ zwei Homomorphismen, so ist die Verkettung $\psi \circ \phi \colon G \to F$ wieder ein Homomorphismus.*

Beweis. Seien $g, g' \in G$. Dann gilt
$$\begin{aligned}(\psi \circ \phi)(g * g') &= \psi(\phi(g * g')) \\ &= \psi(\phi(g) * \phi(g')) \\ &= \psi(\phi(g)) * \psi(\phi(g')) \\ &= (\psi \circ \phi)(g) * (\psi \circ \phi)(g')\end{aligned}$$
□

Definition 1.1.7. Ein Homomorphismus $\phi\colon G \to H$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Homomorphismus $\psi\colon H \to G$ mit $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_G$ und $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_H$ gibt. In diesem Fall nennen wir G und H *isomorph*, schreibe $G \cong H$.

Proposition 1.1.8. *Ein Homomorphismus $\phi\colon G \to H$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn ϕ bijektiv ist.*

Beweis. Falls ϕ ein Isomorphismus ist, so gibt es nach Definition insbesondere eine Umkehrabbildung, wodurch ϕ schon bijektiv ist. Sei umgekehrt angenommen, dass ϕ ein bijektiver Homomorphismus ist und sei $\psi\colon H \to G$ die Umkehrfunktion. Wir müssen zeigen, dass ψ wieder ein Homomorphismus ist. Seien hierzu $h, h' \in H$. Setzen wir $g := \psi(h)$ und $g' := \psi(h')$, so gilt

$$\psi(h * h') = \psi(\phi(g) * \phi(g')) = \psi(\phi(g * g')) = g * g' = \psi(h) * \psi(h'). \qquad \square$$

Beispiel 1.1.9. Die Abbildung $\phi_n\colon \mathbb{Z}_n \to C_n$ aus Beispiel 1.1.5:3 ist bijektiv und deshalb schon ein Isomorphismus von Gruppen. Es gilt also $\mathbb{Z}_n \cong C_n$.

Beweis. Sowohl $\mathbb{Z}_n$ als auch C_n enthalten n Elemente, weswegen es reicht, Surjektivität zu prüfen. Um dies zu tun, bemerken wir, dass jedes $k \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden kann als $l + sn$ mit $0 \leqslant l < n$ und $s \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$e^{\frac{2\pi i k}{n}} = e^{\frac{2\pi i \cdot (l+sn)}{n}} = \phi_n(\underline{l}). \qquad \square$$

Beispiel 1.1.10. Die Gruppen $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}(\{1,2\})$ und $\mathbb{Z}_2$ sind isomorph: Wir bemerken, dass $\mathfrak{S}_2$ auch zwei Elemente enthält, nämlich die Identitätsabbildung id und die Abbildung τ, die 1 und 2 vertauscht. Die Abbildung $\omega\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathfrak{S}_2$, die $\underline{0}$ auf id und $\underline{1}$ auf τ schickt, ist bijektiv, und auch ein Homomorphismus, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\omega(\underline{0}+\underline{0}) &= \omega(\underline{0}) = \mathrm{id} = \mathrm{id}\circ\mathrm{id} = \omega(\underline{0})\circ\omega(\underline{0}),\\
\omega(\underline{1}+\underline{0}) &= \omega(\underline{1}) = \tau \;=\; \tau\circ\mathrm{id} = \omega(\underline{1})\circ\omega(\underline{0}),\\
\omega(\underline{0}+\underline{1}) &= \omega(\underline{1}) = \tau \;= \mathrm{id}\circ\tau \;= \omega(\underline{0})\circ\omega(\underline{1}),\\
\omega(\underline{1}+\underline{1}) &= \omega(\underline{0}) = \mathrm{id} = \;\tau\circ\tau \;= \omega(\underline{1})\circ\omega(\underline{1}).
\end{aligned}$$

Beispiel 1.1.11. Bezeichne $\mathbb{F}_2$ den eindeutigen Körper mit zwei Elementen. Dann sind die Gruppen $\mathfrak{S}_3$ und die Matrixgruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ isomorph. (Dies ist nicht offensichtlich; Ihr könnt Euch ja mal daran versuchen!)

Grob gesagt unterscheiden sich isomorphe Gruppen lediglich in der Benennung ihrer Elemente, nicht aber in ihrer internen Struktur. Eine „gute“ Eigenschaft, die eine gegebene Gruppe entweder haben oder nicht haben kann, ist also „invariant unter Isomorphie“. Das heißt: Falls $G \cong H$ gilt, so hat G diese Eigenschaft genau dann, wenn H sie hat.

Beispiel 1.1.12. Seien G und H zwei isomorphe Gruppen. Dann ist G genau dann abelsch, wenn H abelsch ist – abelsch zu sein ist also eine Isomorphieinvariante.

Beweis. Sei $\phi\colon G \to H$ ein Isomorphismus von Gruppen, mit Umkehrabbildung ψ. Wir nehmen an, dass G abelsch ist, und wollen zeigen, dass H abelsch ist. Seien hierzu $h, h' \in H$. Wenn wir wieder $g := \psi(h)$ und $g' := \phi(h')$ schreiben, dann gilt

$$h * h' = \phi(g) * \phi(g') = \phi(g * g') = \phi(g' * g) = \phi(g') * \phi(g) = h' * h.$$

Die andere Richtung folgt auf die gleiche Weise, durch Vertauschen der Rollen von G und H, wobei wir die Symmetrie von Isomorphie ausnutzen. □

1.2. Ein paar Semester im Schnelldurchlauf

Wie versprochen schauen wir nun in einige andere Bereiche der reinen Mathematik hinein; nur um zu sehen, dass hier vieles ähnlich aussieht. Wir fangen klein an, wachsen aber sehr schnell.

Beispiel 1.2.1 (Mengen)**.** Eine *Menge* X ist eine Zusammenfassung von Elementen. Für jede Menge X gibt es die *Identitätsabbildung* $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, die definiert ist durch $\mathrm{id}_X(x) = x$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen Mengen heißt *bijektiv*, wenn es eine Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, die $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ erfüllt. Dies ist äquivalent dazu, dass es für jedes Element $y \in Y$ genau ein Element $x \in X$ gibt, das $f(x) = y$ erfüllt. In diesem Fall nennen wir X und Y *gleichmächtig*.

Die *Kardinalität* einer Menge ist die Anzahl[2] ihrer Elemente. Gleichmächtige Mengen haben dieselbe Kardinalität – Kardinalität ist also eine „Isomorphieinvariante“ für Mengen. Es ist auch die einzige: Zwei Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie dieselbe Kardinalität haben.

Beispiel 1.2.2 (Vektorräume)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein *Vektorraum über* $\mathbb{K}$, oder kurz *$\mathbb{K}$-Vektorraum*, ist eine abelsche Gruppe V, deren Verknüpfung wir mit „+“ notieren, zusammen mit einer Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, die gewisse Eigenschaften erfüllt (Unitalität und Distributivität). Das Standardbeispiel ist $\mathbb{K}^n$,

[2] Dies muss im Fall, dass die gegebene Menge unendlich viele Elemente hat, präzisiert werden, und je nach dem, wie man es formalisiert, ist die Aussage „Zwei Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie dieselbe Kardinalität haben.“ tautologisch. Es reicht aber, wenn Ihr im Moment über endliche Mengen nachdenkt.

zusammen mit der koordinatenweisen Addition und Skalarmultiplikation. Eine Abbildung $\phi\colon V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen heißt *linear*, falls

$$\begin{aligned} \phi(v+v') &= \phi(v) + \phi(v') && \text{(für } v, v' \in V\text{)} \\ \phi(\lambda \cdot v) &= \lambda \cdot \phi(v) && \text{(für } \lambda \in \mathbb{K}, v \in V\text{)} \end{aligned}$$

gilt. Für jeden Vektorraum V ist die Identitätsabbildung id_V linear. Sind $\phi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to U$ zwei lineare Abbildungen, dann ist $\psi \circ \phi\colon V \to U$ ebenfalls linear.

Eine lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$ heißt *Isomorphismus*, wenn es eine lineare Abbildung $\psi\colon W \to V$ gibt mit $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ und $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$. Dies ist äquivalent dazu, dass ϕ bijektiv ist. In diesem Fall nennen wir V und W *isomorph*.

Jeder Vektorraum hat eine Basis. (Dies ist eine Konsequenz aus dem Lemma von Zorn.) Die *Dimension* eines Vektorraumes V ist die Kardinalität einer Basis von V, und man kann zeigen, dass dies nicht von der Wahl der Basis abhängt. Isomorphe Vektorräume haben dieselbe Dimension – Dimension ist also eine „Isomorphieinvariante“ für Vektorräume. Es ist auch die einzige: Zwei Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

Beispiel 1.2.3 (Algebren)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine $\mathbb{K}$-*Algebra* ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum A, zusammen mit einer bilinearen Abbildung $A \times A \to A$, $(a, a') \mapsto a \bullet a'$, genannt *Multiplikation*. Wir fordern Assoziativität und die Existenz eines multiplikativ neutralen Elements $1_A \in A$. Eine prominente $\mathbb{K}$-Algebra ist der Vektorraum $\mathbb{K}^{n \times n}$ aller $(n \times n)$-Matrizen, zusammen mit der Multiplikation von Matrizen.

Eine Abbildung $\phi\colon A \to B$ zwischen $\mathbb{K}$-Algebren heißt *Algebrenhomomorphismus*, wenn sie linear ist und ferner

$$\begin{aligned} \phi(1_A) &= 1_B, \\ \phi(a \bullet a') &= \phi(a) \bullet \phi(a') && (a, a' \in A) \end{aligned}$$

gilt. Für jede Algebra A ist die Identitätsabbildung id_A ein Algebrenhomomorphismus. Sind $\phi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ zwei Algebrenhomomorphismen, dann ist $\psi \circ \phi\colon A \to C$ ebenfalls ein Algebrenhomomorphismus.

Ein Algebrenhomomorphismus $\phi\colon A \to B$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Algebrenhomomorphismus $\psi\colon B \to A$ gibt mit $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_A$ und $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_B$. Dies ist äquivalent dazu, dass ϕ bijektiv ist. In diesem Fall nennen wir A und B *isomorph*.

Das nachfolgende Beispiel kommt nicht mehr aus der Algebra, sondern aus der Geometrie, und bedarf einer kleinen Erzählung: Ein „Raum“ ist eine Menge, auf der es einen Begriff von „Nähe“ gibt. Dieser könnte über eine Abstandsfunktion (d. h. eine „Metrik“) etabliert werden, aber es stellt sich heraus, dass diese für das

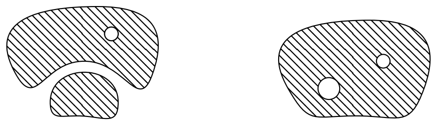


Abbildung 1.2. Die Teilmengen X und Y des $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph, weil X zwei Wegkomponenten hat, aber Y nur eine.

Studium der „Formen" reichlich überflüssige Informationen enthält. Es scheint nur relevant zu sein, zu wissen, was es heißt, einem Punkt beliebig nahe zu kommen; „große" Abstände sind komplett egal. Dies wird formalisiert durch den Begriff einer „offenen Teilmenge": Anschaulich gesprochen ist eine Teilmenge U eines Raumes „offen", wenn für jeden Punkt $x \in U$ folgendes gilt: Will ich dem Punkt x beliebig nahe kommen, dann werde ich ab irgendeinem Zeitpunkt zwangsweise selbst in U liegen. Nun aber genug der Gleichnisse, hier die Definition:

Beispiel 1.2.4 (Topologische Räume)**.** Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X, zusammen mit einer Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, die gewisse Eigenschaften ($\mathcal{T}$ enthält X und $\varnothing$ und ist stabil bezüglich beliebiger Vereinigungen und endlicher Schnitte) erfüllt. Wir nennen $U \subseteq X$ *offen*, wenn $U \in \mathcal{T}$ gilt. Jede Teilmenge X des $\mathbb{R}^n$ wird auf folgende Weise zu einem topologischen Raum: Eine Teilmenge $U \subseteq X$ sei offen, wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $\{x' \in X;\ \|x' - x\| < \varepsilon\} \subseteq U$.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig*, wenn für jede offene Menge $V \subseteq Y$ auch $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist. Für die obige Klasse von Beispielen ist dies äquivalent zur bekannteren „ε-δ-Definition" von Stetigkeit aus der Analysis (Übung). Für jeden topologischen Raum X ist die Identitätsabbildung id_X stetig. Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetig, dann ist $g \circ f\colon X \to Z$ ebenfalls stetig.

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, für die $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt. Dies ist *nicht* äquivalent dazu, dass f bijektiv ist (betrachte z. B. $f\colon [0,1) \to \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ mit $f(t) = e^{2\pi i t}$). Wenn ein Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ existiert, dann nennen wir X und Y *homöomorph*, schreibe $X \cong Y$.

Es gibt unzählige homöomorphieinvariante Eigenschaften, die topologische Räume haben oder nicht haben können, hier nur einige: Erst- und Zweitabzählbarkeit, Kompaktheit, Wegzusammenhang (siehe hierzu Abbildung 1.2) oder die Hausdorffeigenschaft. Auch gibt es unzählige Beispiele von Räumen, die manche dieser Eigenschaften erfüllen und andere nicht.

Beispiel 1.2.5 (Glatte Mannigfaltigkeiten)**.** Eine *glatte m-dimensionale Mannigfaltigkeit* ist ein zweitabzählbarer Hausdorffraum[3] M, zusammen mit einer offenen Überde-

[3] Im Wesentlichen: Er ist nicht zu groß und nicht zu grob.

ckung $(U_i)_{i\in I}$ von M und einer Familie von Homöomorphismen $(\phi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^m)_{i\in I}$, genannt *Atlas*, so, dass sämtliche Verkettungen $\phi_j \circ \phi_i^{-1}\colon \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ glatt im Sinne der mehrdimensionalen Analysis sind.

Eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten (der Dimension m bzw. n) heißt *glatt*, wenn für die gegebenen Atlanten $(\phi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^m)_{i\in I}$ und $(\psi_j\colon V_j \to \mathbb{R}^n)_{j\in J}$ alle Verkettungen

$$\phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} f^{-1}(V_j) \cap U_i \xrightarrow{f} V_j \xrightarrow{\psi_j} \mathbb{R}^n$$

glatt im Sinne der mehrdimensionalen Analysis sind. Für jede glatte Mannigfaltigkeit M ist die Identitätsabbildung id_M glatt. Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to L$ glatt, so ist auch $g \circ f\colon M \to L$ glatt.

Eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn es eine glatte Abbildung $g\colon N \to M$ gibt, für die $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gilt. In diesem Fall nennen wir M und N *diffeomorph*, schreibe $M \cong N$.

Sind M und N diffeomorph, so sind insbesondere ihre unterliegenden topologischen Räume homöomorph, d. h. alle topologischen Invarianten (z. B. Kompaktheit) sind auch Invarianten für glatte Mannigfaltigkeiten. Die Umkehrung gilt nicht: So gibt es zum Beispiel auf der 7-dimensionalen Sphäre S^7 mehrere glatte Strukturen, sogenannte „exotische Sphären“. Eine weitere Diffeomorphieinvariante glatter Mannigfaltigkeiten ist ihre Dimension.

Das letzte Beispiel kombiniert fast alle vorherigen Beispiele. Anschaulich gesprochen ist ein n-dimensionales Vektorbündel ein Raum X, bei dem „über“ jedem Punkt $x \in X$ ein n-dimensionaler Vektorraum E_x lebt, der „stetig“ in X variiert. Stellt man sich X als etwas „Horizontales“ und den Vektorraum E_x über jedem x als etwas dazu „Orthogonales“ vor, gelangt man zu Abbildung 1.3. Formal werden diese Daten „gebündelt“, indem man einen großen Raum $E = \bigcup_{x\in X}\{x\} \times E_x$ bildet:

Beispiel 1.2.6 (Vektorbündel)**.** Sei $n \geqslant 0$ eine natürliche Zahl. Ein *n-dimensionales Vektorbündel* ist eine stetige Abbildung $p\colon E \to X$ von topologischen Räumen, zusammen mit einer n-dimensionalen Vektorraumstruktur auf allen Urbildern $E_x := p^{-1}(x) \subseteq E$ so, dass eine Stetigkeitsbedingung („lokale Trivialität“) erfüllt ist.

Seien $p\colon E \to X$ und $p'\colon E' \to X'$ zwei Vektorbündel. Ein *Morphismus von Vektorbündeln* ist ein Paar $(\hat{f}, f)$ von stetigen Abbildungen $\hat{f}\colon E \to E'$ und $f\colon X \to X'$ so, dass $p' \circ \hat{f} = f \circ p$ gilt und jede Einschränkung $\hat{f}_x\colon E_x \to E'_{f(x)}$ linear ist. Für jedes Vektorbündel $p\colon E \to X$ ist das Paar $\mathrm{id}_p := (\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_X)$ ein Morphismus. Sind $(\hat{f}, f)\colon p \to p'$ und $(\hat{g}, g)\colon p' \to p''$ zwei Morphismen von Vektorbündeln, so ist auch $(\hat{g}, g) \circ (\hat{f}, f) := (\hat{g} \circ \hat{f}, g \circ f)\colon p \to p''$ ein Morphismus von Vektorbündeln.

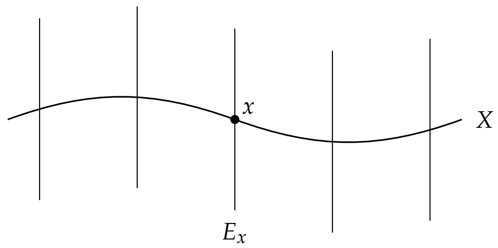


Abbildung 1.3. „I just love sheaves. They have algebra this way (and he sliced his hand up and down) and topology this way (and he sliced his hand left to right).“ – Donald C. Spencer (1912–2001), beschrieben in den *Mathematical Apocrypha* von Steven G. Krantz.

Ein Morphismus $(\hat{f}, f)\colon p \to p'$ von Vektorbündeln ist ein *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $(\hat{g}, g)\colon p' \to p$ mit $(\hat{g}, g) \circ (\hat{f}, f) = \mathrm{id}_p$ und $(\hat{f}, f) \circ (\hat{g}, g) = \mathrm{id}_{p'}$ gibt. In diesem Fall nennen wir p und p' isomorph. Erstaunlicherweise kann auch diese Beschreibung in Topologie und Algebra zerlegt werden: Ein Morphismus $(\hat{f}, f)$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus ist und jedes $\hat{f}_x\colon E_x \to E'_{f(x)}$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Klassische Isomorphieinvarianten von Vektorbündeln über demselben Grundraum X sind sogenannte *charakteristische Klassen*, die mit einem mächtigen Werkzeug aus der Algebraischen Topologie, der Kohomologie, beschrieben werden.

Wir stellen also fest: In der Mathematik interessiert man sich für verschiedene Klassen von *Objekten* (Mengen, Gruppen, topologische Räume usf.), für die es jeweils einen „natürlichen“ Begriff von *Morphismen*, also Pfeilen zwischen ihnen (Abbildungen, Homomorphismen, stetige Abbildungen usf.), gibt. Morphismen können verkettet werden und für jedes Objekt gibt es einen Identitätsmorphismus, der „nichts tut“. Dadurch kann definiert werden, was es für einen Morphismus heißt, ein *Isomorphismus* zu sein: Es soll quasi einen „Umkehrmorphismus“ geben. In Tabelle 1.1 sind die begrifflichen Entsprechungen noch einmal dargestellt.

1.3. Funktorielle Zuordnungen

Viele Konstruktionen in der reinen Mathematik bauen aus einem Objekt aus *einer* der oben beschriebenen Welten ein Objekt aus einer *anderen* Welt – z. B. aus einem Raum eine Algebra. Erstaunlich oft sind diese Konstruktionen „funktoriell“, das heißt: Sie bauen nicht nur aus einem Objekt X ein Objekt FX in der anderen Welt, sondern auch aus einem Morphismus $f\colon X \to Y$ einen Morphismus $Ff\colon FX \to FY$. Dies wird im Zuge der Kategorientheorie formalisiert, aber wir kennen schon jetzt eine ganze Reihe von Beispielen:

OBJEKT	MORPHISMUS	ISOMORPHISMUS
Menge	Abbildung	bijektive Abbildung
Gruppe	Homomorphismus	Isomorphismus
$\mathbb{K}$-Vektorraum	lineare Abbildung	Isomorphismus
$\mathbb{K}$-Algebra	Algebrenhomomorphismus	Isomorphismus
topologischer Raum	stetige Abbildung	Homöomorphismus
glatte Mannigfaltigkeit	glatte Abbildungen	Diffeomorphismus
Vektorbündel	Morphismus von Vektorbündeln	Isomorphismus

Tabelle 1.1. Verschiedene Klassen von Objekten und ihre Morphismen und Isomorphismen.

Beispiel 1.3.1 (Teile der Struktur vergessen)**.** Eine sehr einfache Klasse von Beispielen sind sogenannte „Vergisszuordnungen“:

1. Bei jeder Gruppe G können wir die Verknüpfung vergessen und haben immer noch eine Menge. Bei jedem Homomorphismus $\phi\colon G \to H$ von Gruppen können wir vergessen, dass er kompatibel mit den Verknüpfungen war, und haben immer noch eine Abbildung von Mengen. Das gleiche können wir mit Vektorräumen und linearen Abbildungen sowie mit topologischen Räumen und stetigen Abbildungen machen.

2. Bei einer $\mathbb{K}$-Algebra können wir die Multiplikation und das Einselement verwerfen und uns den zugrundeliegenden Vektorraum merken. Ein Algebrenhomomorphismus ist insbesondere eine lineare Abbildung.

3. Bei einer glatten Mannigfaltigkeit M können wir den Atlas verwerfen und uns nur den zugrundeliegenden topologischen Raum merken. Eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ ist insbesondere eine stetige Abbildung zwischen den zugrundeliegenden topologischen Räumen.

4. Bei einem Vektorbündel $p\colon E \to X$ können wir p und E vergessen und uns nur den Raum X merken. Für jeden Morphismus $(\hat{f}, f)$ von Vektorbündeln können wir $\hat{f}$ vergessen und uns die stetige Abbildung $f\colon X \to X'$ merken.

Beispiel 1.3.2 (Linearisieren)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann können wir für jede Menge X den Vektorraum aller formalen Linearkombinationen

$$\mathbb{K}\langle X\rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot x_i;\ \lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in X \right\}$$

betrachten, mit der naheliegenden Vektoraddition und Skalarmultiplikation. Dieser Vektorraum hat die Menge X als Basis. Sei nun $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von

Mengen. Dann haben wir eine lineare Abbildung $\mathbb{K}\langle f\rangle\colon \mathbb{K}\langle X\rangle \to \mathbb{K}\langle Y\rangle$ mit

$$\mathbb{K}\langle f\rangle\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i \cdot x_i\right) := \sum_{i=1}^{r}\lambda_i \cdot f(x_i).$$

Beispiel 1.3.3 (Tensoralgebren)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann können wir die *Tensoralgebra*

$$T(V) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} V^{\otimes r} = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \cdots$$

betrachten. Elemente in $T(V)$ sind also Linearkombinationen von Summanden der Form $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$. Dieser Vektorraum wird auf folgende Weise zu einer $\mathbb{K}$-Algebra: Für $v_1, \ldots, v_r, v_1', \ldots, v_s' \in V$ setzen wir

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) \bullet (v_1' \otimes \cdots \otimes v_s') := v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1' \otimes \cdots \otimes v_s'.$$

Sei nun $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann haben wir einen Algebrenhomomorphismus $T(f)\colon T(V) \to T(W)$, der auf Basisvektoren definiert ist als

$$T(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) := f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_r).$$

Beispiel 1.3.4 (Diskrete und triviale Topologie)**.** Sei X eine Menge. Dann gibt es zwei sehr unkreative Möglichkeiten, aus X einen topologischen Raum zu machen, und beide sind funktoriell:

1. *Jede* Menge in X wird als offen angesehen. Wir nennen dies die *diskrete Topologie* auf X und notieren den resultierenden topologischen Raum als X_{disk}. Ist $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von Mengen, dann ist f stetig als Abbildung $X_{\text{disk}} \to Y_{\text{disk}}$: Wir müssen nur prüfen, dass das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist, aber in X_{disk} sind *alle* Teilmengen offen.

2. *Nur* $\varnothing$ und X selbst werden als offen angesehen. Wir nennen dies die *triviale Topologie* auf X und notieren den resultierenden topologischen Raum als X_{triv}. Ist $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von Mengen, dann ist f stetig als Abbildung $X_{\text{triv}} \to Y_{\text{triv}}$: Wir müssen nur prüfen, dass die Urbilder von $\varnothing$ und Y offen sind; diese sind aber $\varnothing$ und X.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass in allen bisherigen Beispielen die jeweilige Zuordnung F die Gleichungen $F\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$ sowie $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ erfüllt.

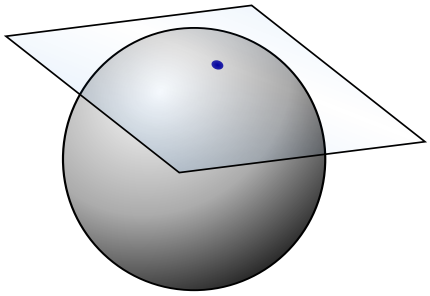


Abbildung 1.4. Der Tangentialraum $T_x S^2$ an einem Punkt x auf der Kugeloberfläche S^2. (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Image_Tangent-plane.svg, Public Domain)

Folgerung 1.3.5. *Sei F eine funktorielle Zuordnung und sei $f\colon X \to Y$ ein Isomorphismus in der „Welt links“.*[4] *Dann ist auch $Ff\colon FX \to FY$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Weil f ein Isomorphismus ist, gibt es einen Pfeil $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dann gilt aber auch $Fg \circ Ff = F(g \circ f) = F\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$, und gleichermaßen $Ff \circ Fg = \mathrm{id}_{FY}$. □

Beispiel 1.3.6 (Tangentialbündel und Differential)**.** Ist M eine glatte m-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$, so kann man den *Tangentialraum* T_xM an M definieren, zum Beispiel als Menge aller Äquivalenzklassen von glatten Abbildungen $\alpha\colon (-1,1) \to M$ mit $\alpha(0) = x$, wobei $\alpha \sim \beta$, falls $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \alpha)(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \beta)(0)$ für eine Karte $\phi\colon U \to \mathbb{R}^m$ um x gilt. Man kann zeigen, dass T_xM die Struktur eines m-dimensionalen Vektorraumes trägt, und man kann ihn sich gut vorstellen als „Ebene, die sich in x an M anschmiegt“, siehe Abbildung 1.4.

Man kann nun, wie oben angedeutet, *alle* Tangentialräume zu einem einzigen Raum[5] $TM := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_xM$ „bündeln“ und erhält ein m-dimensionales Vektorbündel $p\colon TM \to M$, das sogenannte *Tangentialbündel*, mit $p(x, v) = x$.

Ist $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, so ist die Abbildung $T_xf\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ mit $T_xf([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ linear, genannt *Differential*. Man kann zeigen, dass das Paar $Tf := (\bigcup_{x \in X} \{x\} \times T_xf, f)$ ein Morphismus von Vektorbündeln ist. Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass auch diese Zuordnung kompatibel mit Identitäten und Verkettungen ist: Hierbei folgt „$T\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{TM \to M}$“ direkt durch Ausschreiben der Definitionen. Abschließend besagt eine Umformulierung der aus der Schule bekannten Kettenregel: Für glatte Funktionen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to L$ sowie $x \in M$ gilt $T_x(g \circ f) = (T_{f(x)}g) \circ (T_xf)$, und das heißt $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

[4] Hier wird schon offenkundig, dass wir eine vernünftige Metasprache brauchen.

[5] Es ist nicht ganz einfach, die Topologie auf TM zu definieren, aber falls $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Untermannigfaltigkeit ist, dann geht es leicht: Dann kann man nämlich T_xM als Untervektorraum von $\mathbb{R}^k$ auffassen und setzt $TM := \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^k;\ v \in T_xM\}$ mit der Teilraumtopologie von $M \times \mathbb{R}^k$.

$$
\begin{tikzcd}
(\text{glatte Mannigfaltigkeiten}) \arrow[d, "T"'] \arrow[dd, dashed, bend right] & & \\
(\text{Vektorbündel}) \arrow[d, dashed] & (\mathbb{K}\text{-Algebren}) \arrow[d, dashed, shift right] & \\
(\text{topologische Räume}) \arrow[dr, dashed] & (\mathbb{K}\text{-Vektorräume}) \arrow[u, shift right, "T(-)"'] \arrow[d, dashed, shift right] & (\text{Gruppen}) \arrow[dl, dashed] \\
& (\text{Mengen}) \arrow[ul, shift right, "(-)_{\text{disk}}"'] \arrow[ul, shift left, "(-)_{\text{triv}}"] \arrow[u, shift right, "\mathbb{K}\langle - \rangle"'] &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1.5. Die bisher beschriebenen funktoriellen Zuordnungen, wobei die gestrichelten Pfeile die „Vergisszuordnungen“ sind. Die zwei Wege, um von glatten Mannigfaltigkeiten zu topologischen Räumen zu kommen, stimmen tatsächlich überein (Übung!). Dass in diesem Diagramm zwei Pfeile T (bzw. $T(-)$) heißen, ist bedauerlich, aber Standardnotation – es sind ja auch zwei verschiedene Welten.

Wir sammeln alle erwähnten „funktoriellen Zuordnungen“ in Abbildung 1.5. Dies sind *bei Weitem* nicht alle Pfeile, die man dort eintragen könnte: So ist zum Beispiel die Algebraische Topologie durchzogen von etlichen funktoriellen Zuordnungen, etwa der Fundamentalgruppe oder der singulären (Ko-)Homologie.

1.4. Freie Objekte

In diesem letzten Abschnitt wollen wir ein weiteres Phänomen beschreiben, das an verschiedensten Stellen der Mathematik auftaucht, nämlich sogenannte *freie Objekte*. Wir starten mit einem Beispiel, das vielleicht aus der Linearen Algebra bekannt ist.

Beispiel 1.4.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $X \subset V$ eine Basis für V und sei W ein weiterer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann lässt sich jede Abbildung *von Mengen* $f\colon X \to W$ „linear fortsetzen“, d. h. es gibt eine eindeutige *lineare* Abbildung $f^\sharp\colon V \to W$ mit $f^\sharp|_X = f$. Diese ist wie folgt gegeben: Jedes Element $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot x_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ und $x_i \in X$. Dann setzen wir

$$f^\sharp\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot x_i\right) := \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot f(x_i) \in W.$$

Diese Beobachtung können wir auch etwas anders ausdrücken: Zunächst stellen wir fest, dass V isomorph zu dem Vektorraum $\mathbb{K}\langle X\rangle$ aus Beispiel 1.3.2 ist, denn beide Vektorräume haben X als Basis. Sind wir etwas pedantischer und unterscheiden zwischen dem Vektorraum W und der zugrundeliegenden Menge UW, sowie zwischen einer linearen Abbildung ϕ und seiner zugrundeliegenden Abbildung $U\phi$ zwischen den zugrundeliegenden Mengen, so erhalten wir also eine 1:1-Korrespondenz von Mengen von Morphismen

$$\begin{aligned}\{\text{lineare Abbildungen } \mathbb{K}\langle X\rangle \to W\} &\leftrightarrow \{\text{Abbildungen } X \to UW\},\\ \phi &\mapsto (U\phi)|_X\\ f^\sharp &\leftarrow\!\shortmid f.\end{aligned}$$

Wir nennen $\mathbb{K}\langle X\rangle$ den *freien Vektorraum über der Menge X* (diese Bezeichnung hätten wir auch schon in Beispiel 1.3.2 einführen können, aber hier passt es besser in die Geschichte). Das Wort „frei" kann hier als „maximale Anzahl an Freiheitsgraden, mit X als Erzeugendensystem" gelesen werden. Darüber hinaus erklärt sich die Wortwahl „frei" dadurch, dass es in $\mathbb{K}\langle X\rangle$ keine „Abhängigkeiten" zwischen den Elementen aus X wie z. B. $x = 2y$ gibt, weil diese ja linear unabhängig sind.

Wir bemerken, dass in diesem Beispiel schon zwei „Welten" involviert sind, nämlich $\mathbb{K}$-Vektorräume und Mengen, sowie zwei funktorielle Zuordnungen zwischen diesen Welten, nämlich die Vergisszuordnung U sowie die Konstruktion $\mathbb{K}\langle -\rangle$. Die obige 1:1-Korrespondenz beschreibt also eine „Verschränkung" zwischen diesen beiden Zuordnungen, die wir später *Adjunktion* nennen werden. Wir wollen noch einige weitere, ähnlich funktionierende Beispiele untersuchen, wobei wir der obigen Begriffsbildung folgen und die Bezeichnung „frei über" verwenden, wenn es eine ähnliche 1:1-Korrespondenz gibt.

Beispiel 1.4.2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir bemerken zunächst, dass V in $T(V)$ enthalten ist, als Unterraum aller $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ mit $r = 1$. Sei nun B eine $\mathbb{K}$-Algebra, mit zugrundeliegendem $\mathbb{K}$-Vektorraum UB. Dann gibt es für jede lineare Abbildung $\phi\colon V \to UB$ einen eindeutigen $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismus $\phi^\sharp\colon T(V) \to B$ mit $(U\phi^\sharp)|_V = \phi$, und dieser ist gegeben durch

$$\phi^\sharp(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) := \phi(v_1) \bullet \cdots \bullet \phi(v_r).$$

Anschaulich gesprochen liegt das daran, dass $T(V)$ alle „formalen" Produkte von Elementen aus V enthält, und zwischen ihnen keine weiteren Abhängigkeiten wie etwa $v \otimes 2v = v \otimes v \otimes v$ gelten. Wir haben also wieder eine 1:1-Korrespondenz

$$\{\text{Algebrenhomomorphismen } T(V) \to B\} \leftrightarrow \{\text{lineare Abbildungen } V \to UB\}.$$

Anders ausgedrückt ist $T(V)$ die freie (unitale, assoziative) $\mathbb{K}$-Algebra über dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V, auch wenn der Begriff „Tensoralgebra" üblicher ist.

Beispiel 1.4.3. Sei X eine Menge. Dann können wir eine große Menge $F(X)$ bauen, die alle „Wörter" enthält, deren „Buchstaben" x^+ oder x^- mit $x \in X$ sind, z. B. $\mathfrak{a}^+\mathfrak{b}^+\mathfrak{a}^+\mathfrak{b}^- \in F(\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\})$. Die Länge des Wortes ist dabei egal; insbesondere gibt es auch das *leere Wort* $\varnothing$. Es gilt dabei die *Kürzungsregel* $x^+x^- = \varnothing = x^-x^+$, d. h. wannimmer ein Buchstabe und sein eigener Gegenspieler nebeneinander stehen, töten sie sich. Durch das „Aneinanderketten" von Wörtern wird $F(X)$ zu einer Gruppe, mit dem leeren Wort als neutralem Element, und mit Inversion gegeben durch „Wort von hinten nach vorne lesen, mit umgedrehten Vorzeichen", also z. B. $(\mathfrak{a}^+\mathfrak{b}^+\mathfrak{a}^+\mathfrak{b}^-)^{-1} = \mathfrak{b}^+\mathfrak{a}^-\mathfrak{b}^-\mathfrak{a}^-$. Dann kann X als die Teilmenge von $F(X)$ aufgefasst werden, die alle Wörter der Form x^+ für $x \in X$ enthält. Wir bemerken, dass $F(X)$ als Gruppe von X erzeugt wird (d. h. die kleinste Untergruppe von $F(X)$, die X enthält, ist schon ganz $F(X)$), aber ansonsten wieder maximale Unabhängigkeit zwischen den Elementen aus X herrscht; z. B. gilt keine Gleichung der Form $\mathfrak{a}^+\mathfrak{b}^-\mathfrak{b}^- = \varnothing$.

Eine freie Gruppe kennen wir bereits: Man prüft leicht, dass $\mathbb{Z}$ isomorph zu $F(\{\mathfrak{a}\})$, also zur freien Gruppe über einem Alphabet mit einem Buchstaben ist.

Sei nun H eine weitere Gruppe, mit zugrundeliegender Menge UH. Dann gibt es für jede Abbildung von Mengen $f\colon X \to UH$ einen eindeutigen Homomorphismus $f^\sharp\colon F(X) \to H$ mit $(Uf^\sharp)|_X = f$, und dieser ist gegeben durch

$$f^\sharp(x_1^\pm \cdots x_r^\pm) = f(x_1)^{\pm 1} * \cdots * f(x_r)^{\pm 1}.$$

Wir haben also eine 1:1-Korrespondenz von Mengen von Morphismen

$$\{\text{Homomorphismen } F(X) \to H\} \leftrightarrow \{\text{Abbildungen } X \to UH\}.$$

Anders ausgedrückt ist $F(X)$ die *freie Gruppe* über der Menge X, und tatsächlich ist das auch der übliche Name für diese Gruppe.

Beispiel 1.4.4. Sei G eine Gruppe. Dann können wir G künstlich „abelsch machen", indem wir die Untergruppe, die von allen Elementen der Form $ghg^{-1}h^{-1}$ erzeugt wird, rausteilen. Der Quotient heißt *Abelisierung* G^{ab}. Die Quotientenabbildung $\pi\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ ist ein Homomorphismus von Gruppen. Sei nun A eine abelsche Gruppe, und um ganz genau zu sein, bezeichne UA die zugrundeliegende Gruppe, von der wir nur vergessen haben, dass sie abelsch ist. Dann gibt es (im Wesentlichen mithilfe des „fundamentalen Homomorphiesatzes") für jeden Homomorphismus $\phi\colon G \to UA$ einen eindeutigen Homomorphismus $\phi^\sharp\colon G^{\mathrm{ab}} \to A$ mit $U\phi^\sharp \circ \pi = \phi$. Wir haben also wieder eine 1:1-Korrespondenz von Morphismenmengen

$$\{\text{Homomorphismen } G^{\mathrm{ab}} \to A\} \leftrightarrow \{\text{Homomorphismen } G \to UA\}.$$

Auch wenn es nicht ganz so aussieht, sind auch hier zwei „Welten“ beteiligt, nämlich die der Gruppen und die der abelschen Gruppen.

Wir schließen dieses Kapitel mit zwei Beispielen aus der Topologie ab, einem naheliegenden – und einem eigentlich ähnlich banalem, aber leicht verstörendem:

Beispiel 1.4.5. Sei X eine Menge. Dann können wir wie in Beispiel 1.3.4:1 den topologischen Raum X_{disk} betrachten, d. h. die Punktemenge ist X und alle Teilmengen sind offen. Sei Y ein weiterer topologischer Raum, dessen zugrundeliegende Menge wir mit UY bezeichnen. Dann ist jede Abbildung $f\colon X \to UY$ schon stetig, wenn wir sie als Abbildung zwischen Räumen $X_{\text{disk}} \to Y$ betrachten. Wir haben also eine 1:1-Korrespondenz

$$\{\text{stetige Abbildungen } X_{\text{disk}} \to Y\} \leftrightarrow \{\text{Abbildungen } X \to UY\},$$

wodurch X_{disk} zum freien topologischen Raum über der Menge X wird.

Beispiel 1.4.6. Sei Y eine Menge. Dann können wir wie in Beispiel 1.3.4:2 den topologischen Raum Y_{triv} betrachten, d. h. die Punktemenge ist Y und nur die Teilmengen $\varnothing$ und Y selbst sind offen. Sei X ein topologischer Raum, dessen zugrundeliegende Menge wir mit UX bezeichnen. Dann ist jede Abbildung $f\colon UX \to Y$ schon stetig, wenn wir sie als Abbildung zwischen Räumen $X \to Y_{\text{triv}}$ betrachten. Wir haben also wieder eine 1:1-Korrespondenz, diesmal aber andersherum verschränkt

$$\{\text{Abbildungen } UX \to Y\} \leftrightarrow \{\text{stetige Abbildungen } X \to Y_{\text{triv}}\}.$$

Das letzte Beispiel zeigt, dass man sorgfältig unterscheiden sollte, welche der beiden funktoriellen Zuordnungen welche Rolle in der „Verschränkung“ spielt: ob sie „links“ (also vor einem „$\to$“) oder „rechts“ (also nach einem „$\to$“) steht. Es zeigt auch, dass eine Vergisszuordnung nicht notwendigerweise die rechte Rolle übernehmen muss – auch wenn dieser Fall deutlich häufiger auftaucht.

Kapitel 2.

Grundlagen

Perhaps the purpose of categorical algebra is
to show that which is trivial is trivially trivial.

PETER FREYD (*1936)

2.1. Kategorien

Bevor wir den Begriff einer Kategorie präzise machen können, müssen wir ein subtiles mengentheoretisches Problem umgehen: Wir würden nämlich gerne von einem mathematischen Objekt sprechen können, das z. B. *alle* Mengen enthält. Wie einigen von Euch vielleicht bewusst ist, führt dies schnell zu Widersprüchen, z. B. der Menge $\{A;\ A \notin A\}$ aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Man löst diesen Konflikt, indem man sorgfältig zwischen *Klassen* und *Mengen* unterscheidet:

Axiom 2.1.1. Wir passen die Axiome Mengenlehre in drei Schritten an:

1. Wir erinnern uns, dass eigentlich *alles* eine Menge ist, selbst die natürlichen Zahlen: $0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ usf.

2. Wir nehmen an, dass es ein *Grothendieck-Universum* $\mathcal{U}$ gibt, in dem sich alles abspielt. Ein solches Universum ist eine Menge, die groß genug ist, dass sämtliche uns bekannten Mengenoperationen darin stattfinden können (z. B. $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, oder „$X, Y \in \mathcal{U} \implies X \times Y \in \mathcal{U}$“). Ferner ist $\mathcal{U}$ *transitiv*, das heißt: Falls $X \in \mathcal{U}$ sowie $x \in X$ gilt, dann gilt auch $x \in \mathcal{U}$.

3. Wir shiften unsere Begriffe: Ab jetzt ist eine *Menge* ist ein Element in $\mathcal{U}$, während eine *Klasse* eine Teilmenge von $\mathcal{U}$ ist.

Durch die Transitivität des Universums ist jede Menge auch eine Klasse; die Umkehrung gilt aber nicht. Eine Klasse, die keine Menge ist, nennen wir auch *echte Klasse*.

Jetzt sind wir gut gerüstet, sauber zu definieren, was eine Kategorie ist:

Definition 2.1.2. Eine *Kategorie* $\mathbf{C}$ besteht aus folgenden Daten:

- Einer Klasse $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$, deren Elemente wir *Objekte* von $\mathbf{C}$ nennen,
- Für je zwei Objekte X und Y eine Klasse $\mathbf{C}(X,Y)$, deren Elemente wir *Morphismen* von X nach Y nennen. Wir schreiben $f\colon X \to Y$ für $f \in \mathbf{C}(X,Y)$. Wir nennen X *Quelle* und Y *Ziel* von f.
- Für drei Objekte X, Y und Z eine Abbildung $\kappa\colon \mathbf{C}(Y,Z) \times \mathbf{C}(X,Y) \to \mathbf{C}(X,Z)$, die wir *Verkettung* nennen, schreibe $g \circ f := \kappa(g,f)$.
- Für jedes Objekt X einen bevorzugten Morphismus $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, den wir *Identitätsmorphismus* nennen.

Wir verlangen, dass folgende Eigenschaften gelten:

1. ASSOZIATIVITÄT. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ für $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$.
2. UNITALITÄT. $\mathrm{id}_X \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_X = g$ für alle $f\colon W \to X$ und $g\colon X \to Y$.

Wir nennen $\mathbf{C}$ *lokal klein*, wenn alle $\mathbf{C}(X,Y)$ Mengen sind, und wir nennen $\mathbf{C}$ *klein*, wenn zusätzlich $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ eine Menge ist.

Beispiel 2.1.3. Wir kennen schon viele Beispiele, die alle lokal klein sind (weil alle Objekte hier insbesondere Mengen sind und alle $\mathbf{C}(X,Y)$ Teilmengen der Menge aller Abbildungen $f\colon X \to Y$ sind):

1. Die Kategorie **Set**, deren Objekte alle Mengen und deren Morphismen Abbildungen zwischen diesen sind.
2. Die Kategorien **Grp** bzw. **Ab**, deren Objekte alle (abelschen) Gruppen und deren Morphismen alle Homomorphismen von Gruppen sind.
3. Für einen Körper $\mathbb{K}$ die Kategorien $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ und $\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$, deren Objekte alle $\mathbb{K}$-Vektorräume bzw. $\mathbb{K}$-Algebren und deren Morphismen alle linearen Abbildungen bzw. Algebrenhomomorphismen sind.
4. Die Kategorie **Top** aller topologischen Räume mit stetigen Abbildungen.
5. Die Kategorie **Mfd** aller glatten Mannigfaltigkeiten mit glatten Abbildungen.
6. Die Kategorie **VBun** aller Vektorbündel mit ihren Morphismen.

Beispiel 2.1.4. Es gibt auch einige kleine Kategorien, die man aus einer einzigen Struktur basteln kann:[1]

1. Jede Gruppe G definiert eine Kategorie BG mit einem einzigen Objekt $\bullet$ und mit Morphismen $BG(\bullet, \bullet) = G$. Die Verkettung ist gegeben durch die Verknüpfung in der Gruppe und die Identität auf dem Objekt $\bullet$ ist das neutrale Element der Gruppe.

2. Jede (prä-)geordnete Menge $(X, \leqslant)$ definiert eine Kategorie $\mathrm{N}X$, deren Objekte die Elemente von X sind, und wir setzen

$$\mathrm{N}X(x, x') := \begin{cases} \{a_{x,x'}\} & \text{für } x \leqslant x', \\ \varnothing & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Die Reflexivität der Ordnungsrelation gewährleistet die Existenz von Identitäten $\mathrm{id}_x := a_{x,x}$, und die Transitivität gewährleistet, dass die Verkettung $a_{x',x''} \circ a_{x,x'} = a_{x,x''}$ wohldefiniert ist.

Wir können nun den Begriff des Isomorphismus aus Abschnitt 1.2 präzisieren.

Definition 2.1.5. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie und seien X und Y zwei Objekte in $\mathbf{C}$. Wir nennen einen Morphismus $f\colon X \to Y$ *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g\colon Y \to X$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Falls ein solches g existiert, so ist es eindeutig. Wir nennen ihn *Inverse* und schreiben $f^{-1} := g$.

Beweis. Seien $g, g'\colon Y \to X$ zwei Morphismen, die die obigen beiden Bedingungen erfüllen. Dann gilt $g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g = \mathrm{id}_X \circ g' = g'$. □

Beispiel 2.1.6. In den viel diskutierten Kategorien ist dies genau die Definition einer Bijektion (für **Set**), eines Isomorphismus von Gruppen (für **Grp**), eines Homöomorphismus (für **Top**), eines Diffeomorphismus (für **Mfd**) usf.

Definition 2.1.7. Wir nennen zwei Objekte X und Y *isomorph*, schreibe $X \cong Y$, wenn es einen Isomorphismus $X \to Y$ gibt. Isomorph zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der Objekte, und die Äquivalenzklassen heißen *Isomorphieklassen*.

Beweis. Wir zeigen die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation:

1. REFLEXIVITÄT. Vermöge id_X ist jedes Objekt ist isomorph zu sich selbst.

2. SYMMETRIE. Wenn X und Y isomorph sind, so gibt es einen Isomorphismus $f\colon X \to Y$. Dann ist aber auch $f^{-1}\colon Y \to X$ ein Isomorphismus.

[1] Die Buchstaben „B“ und „N“ stehen für „Barkonstruktion“ bzw. „Nerv“; zwei simpliziale Konstruktionen, die der geometrische Realisierung der beschriebenen Kategorien entsprechen.

3. TRANSITIVITÄT. Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Isomorphismen, so ist auch $g \circ f$ ein Isomorphismus, mit Inverser $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. $\square$

Die „Klassifikation" einer Kategorie ist die Beschreibung ihrer Isomorphieklassen, und eigentlich fast immer ein sehr schwieriges Unterfangen.

Beispiel 2.1.8. Jede *endlich erzeugte* abelsche Gruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}^d \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}_{n_i}$ mit $n_1, \ldots, n_r$ Potenzen unterschiedlicher Primzahlen. Dies ist eine vollständige Klassifikation der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen.

Um die „Symmetrien" eines einzelnen Objekts X in einer Kategorie $\mathbf{C}$ zu verstehen, ist es hilfreich, die Isomorphismen von X nach X selbst zu studieren.

Definition 2.1.9. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie und sei X ein Objekt in $\mathbf{C}$. Ein *Automorphismus* von X ist ein Isomorphismus $f\colon X \to X$. Wenn $\mathbf{C}$ lokal klein ist, so wird die Menge $\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$ aller Automorphismen von X zusammen mit der Verkettung zu einer Gruppe, genannt *Automorphismengruppe*, dessen neutrales Element id_X ist.

Beispiel 2.1.10. Wir kennen schon viele Automorphismengruppen:

1. Betrachte die Kategorie **Set**. Für eine Menge X ist die Automorphismengruppe von X genau die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}(X)$ aus Beispiel 1.1.3:4.

2. Betrachte die Kategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ aller $\mathbb{K}$-Vektorräume, zusammen mit linearen Abbildungen. Dann ist die Automorphismengruppe von $\mathbb{K}^n$ genau die Matrixgruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ aus Beispiel 1.1.3:5.

3. Etwas tautologisch: Fassen wir eine gegebene Gruppe G wie in Beispiel 2.1.4:1 als Kategorie $\mathrm{B}G$ mit einem Objekt auf, so ist die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{B}G}(\bullet) = \mathrm{B}G(\bullet, \bullet)$ genau die Gruppe G selbst.

Wir schließen diesen Unterabschnitt mit einer wenig überraschenden, aber für den weiteren Verlauf recht hilfreichen Konstruktion ab:

Konstruktion 2.1.11. Seien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ zwei Kategorien. Die *Produktkategorie* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ ist eine Kategorie, die durch folgende Daten gegeben ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{ob}(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &:= \mathrm{ob}(\mathbf{C}) \times \mathrm{ob}(\mathbf{D}), \\ (\mathbf{C} \times \mathbf{D})((X,Y),(X',Y')) &:= \mathbf{C}(X,X') \times \mathbf{D}(Y,Y'), \\ \mathrm{id}_{(X,Y)} &:= (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y), \\ (f',g') \circ (f,g) &:= (f' \circ f, g' \circ g). \end{aligned}$$

Beispiel 2.1.12. Seien G und H zwei Gruppen und sei $G \times H$ ihr Produkt. Dann stimmt die Kategorie $\mathrm{B}(G \times H)$ mit der Produktkategorie $\mathrm{B}G \times \mathrm{B}H$ überein.

2.2. Funktoren

Wir präzisieren nun den Begriff der „funktorielle Zuordnung“ aus Abschnitt 1.3.

Definition 2.2.1. Seien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ Kategorien. Ein *Funktor* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ besteht aus folgenden Daten:

- Einer Abbildung $F\colon \mathrm{ob}(\mathbf{C}) \to \mathrm{ob}(\mathbf{D})$ von Klassen,
- Für je zwei Objekte X und X' eine Abbildung $F\colon \mathbf{C}(X, X') \to \mathbf{D}(FX, FX')$.

Wir verlangen, dass $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ für alle verkettbaren Morphismen in $\mathbf{C}$ sowie $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$ für alle Objekte in $\mathbf{C}$ gilt.

Bemerkung 2.2.2. Für jede Kategorie $\mathbf{C}$ haben wir den *Identitätsfunktor* $\mathrm{id}_{\mathbf{C}}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, der sowohl auf Objekten als auch auf Morphismen nichts tut. Ferner können wir Funktoren verketten: Sind $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ und $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ zwei Funktoren so ist GF mit $(GF)(X) := G(FX)$ und $(GF)(f) := G(Ff)$ wieder ein Funktor (Übung!).

Beispiel 2.2.3. Wir kennen schon viele Beispiele:

1. Sämtliche Vergisszuordnungen aus Abschnitt 1.3 sind Funktoren, die wir von nun an *Vergissfunktoren* nennen.

2. Die Linearisierung, die Tensoralgebra, die diskrete/triviale Topologie sowie das Tangentialbündel sind Funktoren $\mathbb{K}\langle - \rangle\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, $T\colon \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$, $(-)_{\mathrm{disk}}, (-)_{\mathrm{triv}}\colon \mathbf{Set} \rightrightarrows \mathbf{Top}$ sowie $T\colon \mathbf{Mfd} \to \mathbf{VBun}$.

3. Seien G und H zwei Gruppen. Dann sind die Funktoren $\mathrm{B}G \to \mathrm{B}H$ genau die Gruppenhomomorphismen $G \to H$: Das Objekt $\bullet$ in $\mathrm{B}G$ muss auf das Objekt $\bullet$ in $\mathrm{B}H$ geschickt werden, weswegen die einzige Information die Abbildung $\mathrm{B}G(\bullet, \bullet) \to \mathrm{B}H(\bullet, \bullet)$ ist, die kompatibel mit der Verkettung sein muss.

4. Seien X und Y zwei (prä-)geordnete Mengen. Dann sind Funktoren $\mathrm{N}X \to \mathrm{N}Y$ das gleiche wie monotone Abbildungen $X \to Y$. Jeder Funktor dieser Art ist festgelegt dadurch, was er auf Objekten macht, und eine Abbildung $\mathrm{ob}(\mathrm{N}X) \to \mathrm{ob}(\mathrm{N}Y)$ lässt sich genau dann (eindeutig) auf den Morphismen fortsetzen, wenn sie monoton als Abbildung $X \to Y$ ist.

Eine etwas exotischeres und für den Moment nur aus Spaß an der Abstraktion für interessant befundenes Beispiel ist das folgende:

Beispiel 2.2.4. Bemerkung 2.2.2 ermöglicht es uns, eine Kategorie $\mathbf{Cat}$ zu bauen, deren Objekte alle (kleinen) Kategorien und deren Morphismen alle Funktoren zwischen diesen sind. Wir sehen nun folgendes:

1. Wie in Beispiel 2.2.3:3 gesehen, kann jeder Homomorphismus $\phi\colon G \to H$ zwischen Gruppen als Funktor $\mathrm{B}\phi\colon \mathrm{B}G \to \mathrm{B}H$ aufgefasst werden, und es gilt $\mathrm{Bid}_G = \mathrm{id}_{\mathrm{B}G}$ sowie $\mathrm{B}(\psi \circ \phi) = \mathrm{B}\psi \circ \mathrm{B}\phi$. Auf diese Weise erhalten wir also einen Funktor $\mathrm{B}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Cat}$.

2. Wie in Beispiel 2.2.3:4 gesehen, kann jede monotone Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen (prä-)geordneten Mengen als Funktor $\mathrm{N}f\colon \mathrm{N}X \to \mathrm{N}Y$ aufgefasst werden, und es gilt $\mathrm{Nid}_X = \mathrm{id}_{\mathrm{N}G}$ sowie $\mathrm{N}(g \circ f) = \mathrm{N}g \circ \mathrm{N}f$. Wenn wir die Kategorie der prägeordneten Mengen zusammen mit monotonen Abbildungen zwischen ihnen als **PreOrd** bezeichnen, so erhalten wir also einen Funktor $\mathrm{N}\colon \mathbf{PreOrd} \to \mathbf{Cat}$.

Eine weitere Familie von Beispielen bilden die sogenannte „Hom-Funktoren“, die das Konzept des Dualraums aus der Linearen Algebra verallgemeinern. Es gibt zwei Sorten solcher Funktoren, von denen eine die „Pfeilrichtung“ umkehrt, also einen Morphismus $f\colon X \to X'$ auf einen Morphismus $Ff\colon FX' \to FX$. Das ist in unserer Definition eines Funktors nicht vorgesehen. Ein einfacher Weg, dies einzubauen, ist die folgende sehr billige Konstruktion:

Konstruktion 2.2.5. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie. Dann können wir die *duale Kategorie* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ (engl. „opposite“) definieren mit $\mathrm{ob}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{ob}(\mathbf{C})$, aber $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}(X, Y) := \mathbf{C}(Y, X)$. Die Verkettung in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ ist gegeben durch $g \circ^{\mathrm{op}} f := f \circ g$.

Beispiel 2.2.6. Sei G eine Gruppe. Dann haben wir einen Funktor $F\colon \mathrm{B}G \to \mathrm{B}G^{\mathrm{op}}$ gegeben durch $\bullet \mapsto \bullet$ und $g \mapsto g^{-1}$. In der Tat gilt

$$F(g \circ g') = (g \circ g')^{-1} = g'^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ^{\mathrm{op}} g'^{-1} = Fg \circ^{\mathrm{op}} Fg'.$$

Konstruktion 2.2.7. Sei $\mathbf{C}$ eine lokal kleine Kategorie und sei A ein Objekt in $\mathbf{C}$. Dann haben wir zwei Funktoren, die wir *Hom-Funktoren* nennen:

1. Der Funktor $\mathbf{C}(A, -)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ schickt jedes Objekt X in $\mathbf{C}$ auf die Menge $\mathbf{C}(A, X)$ aller Morphismen $A \to X$. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathbf{C}$, so schickt dieser Funktor f auf $f_*\colon \mathbf{C}(A, X) \to \mathbf{C}(A, Y)$ mit $f_*(\alpha) := f \circ \alpha$.

2. Der Funktor $\mathbf{C}(-, A)\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ schickt jedes Objekt X in $\mathbf{C}$ auf die Menge $\mathbf{C}(X, A)$ aller Morphismen $X \to A$. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathbf{C}$, so schickt dieser Funktor f auf $f^*\colon \mathbf{C}(Y, A) \to \mathbf{C}(X, A)$ mit $f^*(\beta) := \beta \circ f$.

Beweis. Wir zeigen zur Abwechslung, dass $\mathbf{C}(-, A)$ ein Funktor ist. Klarerweise gilt $(\mathrm{id}_X)^*(\beta) = \beta \circ \mathrm{id}_X = \beta$, also $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{\mathbf{C}(X,A)}$. Ferner gilt

$$(g \circ f)^*(\beta) = \beta \circ (g \circ f) = (\beta \circ g) \circ f = g^*(\beta) \circ f = f^*(g^*(\beta)) = (f^* \circ g^*)(\beta). \qquad \square$$

Bemerkung 2.2.8. Wir können die beiden Hom-Funktoren aus der vorherigen Konstruktion auch zu einem großen Funktor $\mathbf{C}(-,-)\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ kombinieren: Wir bemerken, dass ein Morphismus $(f,g)\colon (X,Y) \to (X',Y')$ in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}$ aus einem Morphismus $f\colon X' \to X$ in $\mathbf{C}$ und einem Morphismus $g\colon Y \to Y'$ in $\mathbf{C}$ besteht. Dann setzen wir $\mathbf{C}(f,g)(\alpha) := g \circ \alpha \circ f$ für alle $\alpha\colon X \to Y$.

Nach diesen vielen Beispielen wollen wir Eigenschaften von Funktoren studieren:

Definition 2.2.9. Sei $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor.

1. Wir nennen F *treu*, wenn alle $F\colon \mathbf{C}(X,X') \to \mathbf{D}(FX,FX')$ injektiv sind.
2. Wir nennen F *voll*, wenn alle $F\colon \mathbf{C}(X,X') \to \mathbf{D}(FX,FX')$ surjektiv sind.
3. Wir nennen F *volltreu*, wenn er voll und treu ist.

Beispiel 2.2.10.
1. Unsere Vergissfunktoren $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ oder $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ sind treu, denn in diesen Kategorien sind die Morphismen Abbildungen mit gewissen *Eigenschaften*, nicht mit *Zusatzstruktur*. Sie sind aber nicht voll, denn es gibt z. B. Abbildungen zwischen zwei Gruppen, die keine Homomorphismen sind.
2. Der Vergissfunktor $\mathbf{VBun} \to \mathbf{Top}$ aus Beispiel 1.3.1:4 ist nicht treu, denn es gibt Vektorbündel $p\colon E \to B$ sowie Selbstabbildungen $\hat{f}\colon E \to E$ so, dass $(\hat{f}, \mathrm{id}_B)$ ein Morphismus von Vektorbündeln ist, aber $\hat{f} \neq \mathrm{id}_E$ gilt.
3. Für einen Homomorphismus $\phi\colon G \to H$ von Gruppen ist $\mathrm{B}\phi$ genau dann treu, wenn ϕ injektiv ist, und genau dann voll, wenn ϕ surjektiv ist.

Proposition 2.2.11. *Sei $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor und seien $X, X' \in \mathbf{C}$ zwei Objekte.*

1. *Für einen Isomorphismus $f\colon X \to X'$ ist auch $Ff\colon FX \to FX'$ ein Isomorphismus*
2. *Falls F volltreu ist und $f\colon X \to X'$ ein Morphismus, für den $Ff\colon FX \to FX'$ ein Isomorphismus ist, so ist auch f selbst ein Isomorphismus.*
3. *Falls F volltreu ist und $FX \cong FX'$ gilt, so gilt auch $X \cong X'$.*

Beweis. Aussage 1 ist genau Folgerung 1.3.5, und die Aussagen 2 und 3 lasse ich Euch in Aufgabe B.2 zeigen. □

Proposition 2.2.11 rechtfertigt, dass wir informell über einen volltreuen Funktor wie über die „Einbettung" einer „Unterkategorie" $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{D}$ nachdenken, selbst wenn wir keine Forderung zu Injektivität der Zuordnung $\mathrm{ob}(\mathbf{C}) \to \mathrm{ob}(\mathbf{D})$ stellen: Falls $FX = FX'$ für zwei Objekte $X, X' \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$, so gilt mit Proposition 2.2.11:3 schon $X \cong X'$, und das ist „gut genug" für alle Belange. (Es kann natürlich sein, dass wir nicht alle Isomorphietypen von $\mathbf{D}$ mit F treffen. Dies zu fordern, ist der „richtige" Ersatz für Surjektivität eines Funktors, vgl. Aufgabe C.3.)

2.3. Natürliche Transformationen

Seien F und G zwei Funktoren $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Wir können uns fragen, wie „verwandt" diese beiden Funktoren sind. Dies geschieht üblicherweise durch den Begriff der natürlichen Transformation „$F \Rightarrow G$". Personen, die mit den Grundbegriffen der Homotopietheorie vertraut sind, können über natürliche Transformationen zwischen Funktoren gerne so wie über Homotopien zwischen stetigen Abbildungen nachdenken (mit dem Unterschied, dass natürliche Transformationen nicht „rückwärts durchlaufen" werden können).

Definition 2.3.1. Seien F und G zwei Funktoren $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Eine *natürliche Transformation* θ von F nach G, schreibe $\theta \colon F \Rightarrow G$, ist eine Familie $(\theta_X \colon FX \to GX)_{X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})}$ von Morphismen in $\mathbf{D}$ mit folgender *Natürlichkeitseigenschaft*: Sei $f \colon X \to X'$ ein Morphismus in $\mathbf{C}$, so gilt $\theta_{X'} \circ Ff = Gf \circ \theta_X$.

Bemerkung 2.3.2. Die Natürlichkeitseigenschaft lässt sich recht praktisch in Form eines *kommutativen Diagramms* ausdrücken:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\theta_X"'] & FX' \arrow[d, "\theta_{X'}"] \\ GX \arrow[r, "Gf"'] & GX' \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.3.3. Auch wenn natürliche Transformationen unser Leben schon bald viel leichter machen werden, kennen wir aktuell noch nicht so viele von ihnen. Hier einige wenige (und zugegebenermaßen noch etwas künstliche) Beispiele:

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{K}\langle - \rangle \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ der Linearisierungsfunktor aus Beispiel 1.3.2 und sei $U \colon \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Set}$ der Vergissfunktor. Wir erinnern uns, dass für jede Menge X der Vektorraum $\mathbb{K}\langle X \rangle$ die Menge X als Teilmenge enthält. Anders ausgedrückt haben wir eine Abbildung von Mengen

$$\eta_X \colon X \to U\mathbb{K}\langle X \rangle, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{1} 1 \cdot x.$$

   Die Familie dieser Abbildungen $(\eta_X)_{X \in \mathrm{ob}(\mathbf{Set})}$ ist nun eine natürliche Transformation $\mathrm{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow U\mathbb{K}\langle - \rangle$. Um die Natürlichkeitsbedingung zu zeigen, betrachten wir eine Abbildung $f \colon X \to X'$. Dann gilt $U\mathbb{K}\langle f \rangle \circ \eta_X = \eta_{X'} \circ f$, denn für alle $x \in X$ gilt

$$\mathbb{K}\langle f\rangle(\eta_X(x)) = \mathbb{K}\langle f\rangle\left(\sum_{i=1}^{1} 1 \cdot x\right) = \sum_{i=1}^{1} 1 \cdot f(x) = \eta_{X'}(f(x)).$$

2. Seien X und Y zwei prägeordnete Mengen und seien f und g zwei monotone Abbildungen $X \to Y$. Dann gibt es *höchstens* eine natürliche Transformation $\theta \colon \mathrm{N}f \Rightarrow \mathrm{N}g$, und zwar genau dann, wenn $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Hierbei ist die Natürlichkeitsbedingung automatisch erfüllt; es ist nur zu prüfen, ob es *überhaupt* Morphismen $f(x) \to g(x)$ in $\mathrm{N}Y$ gibt.

3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum V können wir die Menge V^* aller linearen Abbildungen $\alpha \colon V \to \mathbb{K}$ betrachten, genannt *Dualraum*. Er wird selbst zu einem Vektorraum durch

$$\begin{aligned}(\alpha + \alpha')(v) &:= \alpha(v) + \alpha'(v),\\ (\lambda \cdot \alpha)(v) &:= \lambda \cdot \alpha(v).\end{aligned}$$

Wir können also sogar V^{**}, den Dualraum des Dualraums betrachten. Die Zuordnung $V \mapsto V^{**}$ kann zu einem Funktor $(-)^{**} \colon \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ gemacht werden, indem wir für eine lineare Abbildung $\phi \colon V \to W$ definieren

$$\phi^{**} \colon V^{**} \to W^{**}, \quad \mu \mapsto [\beta \mapsto \mu(\beta \circ \phi)]$$

Wir haben nun eine natürliche Transformation $\theta \colon \mathrm{id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}} \Rightarrow (-)^{**}$ durch

$$\theta_V \colon V \to V^{**}, \quad v \mapsto [\alpha \mapsto \alpha(v)].$$

Um die Natürlichkeitsbedingung zu zeigen, betrachten wir ein $\phi \colon V \to W$. Dann gilt $\theta_W \circ \phi = \phi^{**} \circ \theta_V$, denn für alle $v \in V$ und alle $\beta \in W^*$ gilt

$$\theta_W(\phi(v))(\beta) = \beta(\phi(v)) = (\beta \circ \phi)(v) = (\phi^{**}(\theta_V(v)))(\beta)$$

Definition 2.3.4. Sei $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor, so ist $\mathrm{id}_F := (\mathrm{id}_{FX})_{X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})}$ eine natürliche Transformation $F \Rightarrow F$, denn für alle $f \colon X \to X'$ gilt $Ff \circ \mathrm{id}_{FX} = Ff = \mathrm{id}_{FX'} \circ Ff$.

Sind ferner $F, G, H \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ drei Funktoren sowie $\theta \colon F \Rightarrow G$ und $\kappa \colon G \Rightarrow H$ zwei natürliche Transformationen, so ist $\kappa \circ \theta := (\kappa_X \circ \theta_X)_{X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})}$ wieder eine natürliche Transformation, diesmal vom Typ $F \Rightarrow H$, denn für alle $f \colon X \to X'$ in $\mathbf{C}$ gilt

$$(\kappa \circ \theta)_{X'} \circ Ff = \kappa_{X'} \circ \theta_{X'} \circ Ff = \kappa_{X'} \circ Gf \circ \theta_X = Hf \circ \kappa_X \circ \theta_X = Hf \circ (\kappa \circ \theta)_X.$$

Dadurch erhalten wir eine Kategorie[2] $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$, deren Objekte Funktoren $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ und deren Morphismen von F nach G die natürlichen Transformationen $F \Rightarrow G$ sind.

Definition 2.3.5. Seien $F, G \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ zwei Funktoren. Ein *natürlicher Isomorphismus* ist ein Isomorphismus von F nach G in der Kategorie $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$.

Lemma 2.3.6. *Eine natürliche Transformation $\theta \colon F \Rightarrow G$ ist genau dann ein natürlicher Isomorphismus, wenn alle $\theta_X \colon FX \to GX$ Isomorphismen sind.*

Beweis. Falls θ ein natürlicher Isomorphismus ist, so gibt es eine natürliche Transformation $\kappa \colon G \Rightarrow F$ mit $\kappa \circ \theta = \mathrm{id}_F$ und $\theta \circ \kappa = \mathrm{id}_G$, d. h. es gilt $\kappa_X \circ \theta_X = \mathrm{id}_{FX}$ und $\theta_X \circ \kappa_X = \mathrm{id}_{GX}$. Also sind alle θ_X Isomorphismen.

Sei umgekehrt angenommen, dass alle θ_X Isomorphismen sind, mit Umkehrmorphismus $\kappa_X \colon GX \to FX$. Wir müssen zeigen, dass die Sammlung aller κ_X die Natürlichkeitsbedingung erfüllt: Sei hierfür $f \colon X \to X'$ ein Morphismus. Dann gilt

$$\kappa_{X'} \circ Gf = \kappa_{X'} \circ Gf \circ \theta_X \circ \kappa_X = \kappa_{X'} \circ \theta_{X'} \circ Ff \circ \kappa_X = Ff \circ \kappa_X. \qquad \square$$

Konstruktion 2.3.7. Wir können vor und hinter eine natürliche Transformationen einen Funktor schalten:

1. Sei $\theta \colon F \Rightarrow F'$ eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathbf{C} \rightrightarrows \mathbf{D}$ und sei $G \colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ ein weiterer Funktor. Dann haben wir eine natürliche Transformation $G\theta := (G\theta_X)_{X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})}$ von Funktoren $GF \Rightarrow GF'$.

2. Sei $\theta \colon G \Rightarrow G'$ eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathbf{D} \rightrightarrows \mathbf{E}$ und sei $F \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein weiterer Funktor. Dann haben wir eine natürliche Transformation $\theta_F := (\theta_{FX})_{X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})}$ von Funktoren $GF \Rightarrow G'F$.

2.4. Das Yoneda-Lemma

Im Allgemeinen ist die Frage, wie viele natürliche Transformationen $F \Rightarrow G$ es zwischen zwei gegebenen Funktoren gibt, schwierig. Ist allerdings der erste Funktor ein Hom-Funktor, so ist die Antwort erstaunlich einfach. Dies ist das berüchtigte Lemma von Yoneda:

[2] Selbst wenn $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ lokal klein sind, ist $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ im Allgemeinen nicht lokal klein, im Wesentlichen weil natürliche Transformationen für *jedes* Objekt eine Information enthalten. Ist allerdings $\mathbf{C}$ klein (also auch $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ eine Menge) und $\mathbf{D}$ lokal klein, dann ist $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ lokal klein.

Lemma 2.4.1 (Yoneda). *Sei* $\mathbf{C}$ *eine lokal kleine Kategorie und sei* $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ *ein Funktor. Dann haben wir für jedes Objekt* A *in* $\mathbf{C}$ *eine Bijektion*

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](\mathbf{C}(-,A), F) &\leftrightarrow FA, \\ \theta &\mapsto \theta_A(\mathrm{id}_A), \\ [\theta^u\colon \alpha \mapsto (F\alpha)(u)] &\leftarrow\!\shortmid u. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Jede natürliche Transformation $\mathbf{C}(-,A) \Rightarrow F$ ist eindeutig festgelegt durch die Wahl eines Elements u in der Menge FA.

Beweis. Der Beweis ist lediglich „Nachrechnen“:

- Wir zeigen, dass für jedes $u \in FA$ die Familie θ^u die Natürlichkeitsbedingung erfüllt: Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathbf{C}$, also ein Morphismus $Y \to X$ in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. Dann gilt für alle $\beta\colon Y \to A$ die Gleichungskette

$$(\theta^u_X \circ f^*)(\beta) = \theta^u_X(\beta \circ f) = F(\beta \circ f)(u) = Ff((F\beta)(u)) = (Ff \circ \theta^u_Y)(\beta).$$

- Wir zeigen, dass die beiden genannten Zuordnungen zueinander invers sind. Hierfür sehen wir $\theta^u_A(\mathrm{id}_A) = (F\mathrm{id}_A)(u) = \mathrm{id}_{FA}(u) = u$ für alle $u \in FA$, sowie für alle natürlichen Transformationen $\theta\colon \mathbf{C}(-,A) \Rightarrow F$ und $\alpha\colon X \to A$

$$\theta^{\theta_A(\mathrm{id}_A)}_X(\alpha) = (F\alpha \circ \theta_A)(\mathrm{id}_A) = (\theta_X \circ \alpha^*)(\mathrm{id}_A) = \theta_X(\alpha). \qquad \square$$

Das Yoneda-Lemma ist eine äußerst seltsame Erscheinung: Sein Beweis erfordert keine „Idee“, aber seine Bedeutung ist zunächst komplett schleierhaft. Sie wird etwas greifbarer in Gestalt der Yoneda-Einbettung, die es erlaubt, jede lokal kleine Kategorie als „Unterkategorie“ einer Funktorkategorie nach Mengen zu sehen:

Konstruktion 2.4.2 (Yoneda-Einbettung). Sei $\mathbf{C}$ eine lokal kleine Kategorie. Dann haben wir einen Funktor $\mathcal{Y}\colon \mathbf{C} \to [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ mit $\mathcal{Y}(A) := \mathbf{C}(-,A)$ und

$$\mathcal{Y}(f)\colon \mathbf{C}(-,A) \Rightarrow \mathbf{C}(-,B), \quad \alpha \mapsto f \circ \alpha$$

für alle Morphismen $f\colon A \to B$. Wir nennen diesen Funktor *Yoneda-Einbettung*.

Proposition 2.4.3. *Die Yoneda-Einbettung ist volltreu (also wirklich eine Einbettung!).*

Beweis. Seien A und B zwei Objekte in $\mathbf{C}$. Wir müssen zeigen, dass die Zuordnung

$$\mathbf{C}(A,B) \to [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}](\mathbf{C}(-,A), \mathbf{C}(-,B)), \quad f \mapsto [\mathcal{Y}(f)\colon \alpha \mapsto f \circ \alpha = \alpha^*(f)]$$

bijektiv ist. Dies ist aber genau das Yoneda-Lemma im Spezialfall $F = \mathbf{C}(-,B)$. $\square$

Auch in dieser Erscheinungsform ist das Yoneda-Lemma womöglich noch nicht so ganz greifbar. Deswegen hier einige Umformulierungen und Konsequenzen:

1. Die natürlichen Transformationen $\mathbf{C}(-, A) \Rightarrow \mathbf{C}(-, B)$ stehen in einer 1:1-Korrespondenz zu den Morphismen $A \to B$.

2. Sind die Funktoren $\mathbf{C}(-, A)$ und $\mathbf{C}(-, B)$ natürlich isomorph, so gilt wegen der Volltreue von $\mathcal{Y}$ und Proposition 2.2.11:3 schon $A \cong B$. Dies ist hilfreich, weil die Isomorphie von $\mathbf{C}(-, A)$ und $\mathbf{C}(-, B)$ „nur" eine Familie von Bijektionen zwischen Mengen (von Morphismen) benötigt, während die Isomorphie der abstrakten Objekte A und B unter Umständen weniger greifbar ist.

Bemerkung 2.4.4. Ersetzen wir in der Yoneda-Einbettung die Kategorie $\mathbf{C}$ durch die duale Kategorie $\mathbf{C}^{\text{op}}$ und nutzen die Gleichheit $(\mathbf{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathbf{C}$, so bekommt die Yoneda-Einbettung die Form $\mathbf{C}^{\text{op}} \to [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$, $A \mapsto \mathbf{C}(A, -)$ und $f \mapsto [\alpha \mapsto \alpha \circ f]$.

Kapitel 3.

Universelle Objekte

Before functoriality, people lived in caves.

BRIAN CONRAD (*1970)

Unter dem Sammelbegriff „universelle Eigenschaft" fasst man Methoden zusammen, um gewisse Objekte einer Kategorie nicht direkt (etwa durch eine explizite Konstruktion), sondern stattdessen durch die Beschreibung *aller* Morphismen, die dieses Objekt als Quelle (bzw. Ziel) haben, eindeutig zu charakterisieren. Dabei trägt das Wort „universell" dem Umstand Rechnung, dass eben alle übrigen Objekte als Ziel (bzw. Quelle) betrachtet werden müssen.

3.1. Limites und Kolimites

Um obige Beschreibung konkret zu machen, beginnen wir direkt mit dem einfachsten Beispiel eines universellen Objekts in einer Kategorie:

Definition 3.1.1. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie.

1. Ein Objekt $\varnothing \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ heißt *initial*, wenn es für jedes Objekt $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ genau einen Morphismus $\varnothing \to X$ gibt.
2. Ein Objekt $* \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ heißt *terminal*, wenn es für jedes Objekt $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ genau einen Morphismus $X \to *$ gibt.

Es gibt zunächst keinen Grund, anzunehmen, dass eine Kategorie initiale oder terminale Objekte besitzt. Falls sie aber existieren, dann gilt folgendes:

Lemma 3.1.2. *Initiale und terminale Objekte sind eindeutig bis auf Isomorphie.*

Beweis. Seien $\varnothing$ und $\varnothing'$ zwei initiale Objekte. Dann gibt es also eindeutige Morphismen $f\colon \varnothing \to \varnothing'$ und $g\colon \varnothing' \to \varnothing$. Nun sind $g \circ f$ bzw. $f \circ g$ Selbstabbildungen auf $\varnothing$ bzw. $\varnothing'$. Von solchen gibt es aber jeweils genau eine, und die kennen wir schon, nämlich $\mathrm{id}_\varnothing$ und $\mathrm{id}_{\varnothing'}$. Also gilt $g \circ f = \mathrm{id}_\varnothing$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\varnothing'}$. Für terminale Objekte argumentiere genauso, nur mit vertauschten Pfeilrichtungen. □

Bemerkung 3.1.3. Viele Konzepte tauchen in zwei sehr ähnlichen Ausprägungen auf, deren einziger Unterschied die Richtung der Pfeile ist – so zum Beispiel initiale und terminale Objekte. Etwas formaler nennen wir zwei Begriffe *zueinander dual*, wenn der eine Begriff in $\mathbf{C}$ dasselbe ist wie das andere in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. In Beweisen spart man sich so sehr viel Zeit, weil es oft genügt, die gewünschte Aussage nur für eine der beiden Ausprägungsformen zu zeigen. Derselbe Beweis, in der Kategorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, zeigt dann die duale Aussage.

Beispiel 3.1.4. In vielen Fällen können wir initiale und terminale Objekte finden:

1. In **Set** ist das initiale Objekt die leere Menge $\varnothing$ und das terminale Objekt jede Menge mit genau einem Element, oft als „Punkt" $*$ notiert. Dies rechtfertigt unsere ursprüngliche Benennung.

2. In **Grp** bzw. **Ab** ist die triviale Gruppe sowohl das initiale als auch das terminale Objekt. Ebenso ist der triviale $\mathbb{K}$-Vektorraum 0 sowohl das initiale als auch das terminale Objekt in $\mathbf{Vect}_\mathbb{K}$.

3. Sei X eine (prä-)geordnete Menge. Dann sind die initialen bzw. terminalen Objekte von $\mathrm{N}X$ genau die Minima bzw. Maxima von X, falls es solche gibt. Dies zeigt, dass initiale und terminale Objekte nicht unbedingt existieren müssen, z. B. $\mathrm{N}\mathbb{N}$ hat kein terminales Objekt.

Initiale und terminale Objekte sind aber nicht die einzigen interessanten universellen Konstruktionen in einer Kategorie: Häufig wollen wir ein Objekt aus einer gegebenen Sammlung von anderen Objekten oder sogar einer Sammlung von Objekten und schon vorhandenen Morphismen zwischen ihnen konstruieren. Hier zwei Beispiele zum Einstieg:

Beispiel 3.1.5. Beide Konstruktionen finden in der Kategorie der Mengen statt, funktionieren aber z. B. in der Kategorie der topologischen Räume ganz genauso.

1. Seien X_1 und X_2 zwei Mengen. Das Produkt $X_1 \times X_2 := \{(x_1, x_2);\, x_i \in X_i\}$ hat folgende universelle Eigenschaft: Es kommt mit zwei Projektionsabbildungen $\pi_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i, (x_1, x_2) \mapsto x_i$ und für jedes Paar von Abbildungen $(\mu_i\colon M \to X_i)_{i=1,2}$ gibt es genau eine Abbildung $f\colon M \to X_1 \times X_2$ mit

$\pi_i \circ f = \mu_i$, nämlich $f(m) = (\mu_1(m), \mu_2(m))$. In Bildern:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[ddl, bend right, "\mu_1"'] \arrow[d, dashed, "\exists ! f"] \arrow[ddr, bend left, "\mu_2"] & \\
& X_1 \times X_2 \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
X_1 & & X_2
\end{tikzcd}$$

2. Seien X_1, X_2 und A Mengen und seien $\alpha_i \colon X_i \to A$ Abbildungen für $i \in \{1, 2\}$. Das *Faserprodukt* $X_1 \times_A X_2 := \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2; \alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)\}$ hat folgende Eigenschaft: Es kommt mit Abbildungen $\pi_i \colon X_1 \times_A X_2 \to X_i$ durch $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ und für jedes Paar von Abbildungen $(\mu_i \colon M \to X_i)_{i=1,2}$ mit $\alpha_1 \circ \mu_1 = \alpha_2 \circ \mu_2$ finden wir genau eine Abbildung $f \colon M \to X_1 \times_A X_2$ mit $\pi_i \circ f = \mu_i$, nämlich $f(m) = (\mu_1(m), \mu_2(m))$. In Bildern:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[drr, bend left, "\mu_2"] \arrow[dr, dashed, "\exists ! f"] \arrow[ddr, bend right, "\mu_1"'] & & \\
& X_1 \times_A X_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& X_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

Definition 3.1.6. Sei J eine kleine Kategorie. Für eine Kategorie $\mathbf{C}$ ist ein *Diagramm der Form J* per Definition das Gleiche wie ein Funktor $D \colon J \to \mathbf{C}$. Wir nennen J auch die *Indexkategorie des Diagramms*.

Konstruktion 3.1.7. Sei $D \colon J \to \mathbf{C}$ ein Diagramm.

1. Ein *Kegel* über D ist eine Familie $(\mu_j \colon M \to Dj)_{j \in \mathrm{ob}(J)}$ von Morphismen in $\mathbf{C}$, bei der $Da \circ \mu_j = \mu_{j'}$ für alle $a \colon j \to j'$ in J gilt. Wir nennen M die *Spitze* und die μ_j die *Beine* des Kegels und notieren den Kegel oft als Paar $(M, \mu_\bullet)$.

2. Ein Morphismus $(M, \mu_\bullet) \to (M', \mu'_\bullet)$ zwischen zwei Kegeln über D ist ein Morphismus $f \colon M \to M'$ mit $\mu'_j \circ f = \mu_j$. Auf diese Weise erhalten wir eine Kategorie $\mathrm{Keg}(D)$ aller Kegel über D. Sie kommt mit einem Vergissfunktor $\mathrm{Keg}(D) \to \mathbf{C}$, der sich nur die Spitze des Kegels merkt.

3. Ein *Limes* eines Diagramms D ist ein terminaler Kegel.

Mit anderen Worten: Ein Limes eines Diagramms $D\colon J \to \mathbf{C}$ ist ein Kegel $(P, \pi_\bullet)$ über D, bei dem es für jeden weiteren Kegel $(M, \mu_\bullet)$ über D genau einen Morphismus $f\colon (M, \mu_\bullet) \to (P, \pi_\bullet)$ von Kegeln gibt:

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[rr, dashed, "\exists^! f"] \arrow[ddl, "\mu_j"'] \arrow[dddr, "\mu_{j'}"] \arrow[ddrrr, "\mu_{j''}"] & & P \arrow[ddlll, "\pi_j"] \arrow[dddl, "\pi_{j'}"] \arrow[ddr, "\pi_{j''}"] & \\
 & & & & \\
Dj \arrow[rrrr, shift left] \arrow[rrrr, shift right] \arrow[drr] & & & & Dj'' \\
 & & Dj' \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

Bemerkung 3.1.8. Weil terminale Objekte wegen Lemma 3.1.2 bis auf Isomorphie eindeutig sind, ist der Isomorphietyp des Limes von D durch das Diagramm festgelegt. Weil der Vergissfunktor $\mathrm{Keg}(D) \to \mathbf{C}$ wegen Proposition 2.2.11 Isomorphie erhält, ist auch der Isomorphietyp der Spitze durch das Diagramm festgelegt; wir notieren ihn manchmal auch als $\lim_j(Dj) = \lim(D)$.

Beispiel 3.1.9. Ein Kegel über dem leeren Diagramm ist dasselbe wie ein Objekt in $\mathbf{C}$. Infolgedessen ist ein Limes über dem leeren Diagramm das gleiche wie ein terminales Objekt der Kategorie $\mathbf{C}$. Dieses Beispiel zeigt bereits, dass Limites nicht notwendigerweise existieren müssen, vgl. Beispiel 3.1.4:1.

Ganz allgemein befreit uns die Kategorientheorie nicht von der Aufgabe, in jeder für uns interessanten Kategorie eine Konstruktion für Limites verschiedenster Formen zu finden und zu prüfen, dass sie die gewünschte universelle Eigenschaft haben. *Erst dann* können rein kategorielle Argumente angewandt werden.

Definition 3.1.10. Sei J eine Indexkategorie. Wir nennen eine gegebene Kategorie $\mathbf{C}$ *J-vollständig*, wenn alle Diagramme $D\colon J \to \mathbf{C}$ einen Limes besitzen.

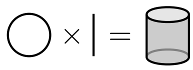
Beispiel 3.1.11 (Produkte)**.** Sei I eine Indexmenge. Dann können wir aus I eine ganz einfache Kategorie $\mathrm{M}I$ basteln, indem wir I als Menge der Objekte wählen und nur Identitätsmorphismen zwischen Objekten zulassen. Ist nun $\mathbf{C}$ eine Kategorie, so ist ein Diagramm der Form $\mathrm{M}I$ das gleiche wie eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Objekten. Ein Limes über einem solchen Diagramm heißt *Produkt* $\prod_{i \in I} X_i$, die Beine $\pi_i\colon \prod_{k \in I} X_k \to X_i$ werden als *Projektionen* bezeichnet.

Dröseln wir noch einmal auf, was es nun für das Produkt bedeutet, terminal unter den Kegeln zu sein, so ergibt sich eine Verallgemeinerung der Charakterisierung aus Beispiel 3.1.5:1: *Für jede Familie $(\mu_i\colon M \to X_i)_{i\in I}$ von Morphismen gibt es genau einen Morphismus $f\colon M \to \prod_{i\in I} X_i$ mit $\pi_i \circ f = \mu_i$.*

Wir können uns nun für konkrete Kategorien fragen, ob Produkte existieren, und wenn ja, wie in diesen Fällen eine explizite Beschreibung aussieht:

1. In der Kategorie der Mengen ist $\prod_{i\in I} X_i$ gegeben durch das *kartesische Produkt*, d. h. die Menge $\{(x_i)_{i\in I};\, x_i \in X_i\}$ aus Beispiel 3.1.5:1, zusammen mit den Projektionsabbildungen $\pi_i((x_k)_{k\in I}) = x_i$.

2. In der Kategorie der topologischen Räume ist $\prod_{i\in I} X_i$ gegeben durch das kartesische Produkt der zugrundeliegenden Mengen, zusammen mit der *Produkttopologie*, d. h. der gröbsten Topologie, bzgl. derer alle π_i stetig sind. Anschaulich stellt man sich das Produkt von zwei Räumen so vor:

3. In der Kategorie der Gruppen ist $\prod_{i\in I} G_i$ das kartesische Produkt der zugrundeliegenden Mengen, zusammen mit der *koordinatenweisen* Verknüpfung
$$(g_i)_{i\in I} * (h_i)_{i\in I} := (g_i * h_i)_{i\in I}.$$

4. In der Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume ist $\prod_{i\in I} V_i$ das kartesische Produkt der zugrundeliegenden Mengen, zusammen mit der koordinatenweisen Addition und Skalarmultiplikation
$$\begin{aligned}(v_i)_{i\in i} + (w_i)_{i\in I} &= (v_i + w_i)_{i\in I},\\ \lambda \cdot (v_i)_{i\in I} &= (\lambda \cdot v_i)_{i\in I}.\end{aligned}$$

5. Sei X eine (prä-)geordnete Menge und sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in $\mathrm{N}X$, also eine Familie von Elementen von X. Dann ist das Produkt dieser x_i gegeben durch das *Infimum* der Teilmenge $\{x_i;\, i \in I\} \subseteq X$, d. h. der größten unteren Schranke – sofern existent. Die Beine sind nichts weiter als die Beobachtung, dass das Produkt tatsächlich eine untere Schranke ist.

Beispiel 3.1.12 (Faserprodukte)**.** Ein Diagramm der Form $(\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet)$ in $\mathbf{C}$ ist gegeben durch zwei Morphismen $\alpha_1\colon X_1 \to A$ und $\alpha_2\colon X_2 \to A$. Ein Limes eines solchen Diagramms heißt *Faserprodukt* $X_1 \times_A X_2$.

Um die universelle Eigenschaft noch einmal aufzudröseln, bemerken wir, dass ein Kegel über einem Diagramm wie oben gegeben ist durch drei Beine, nämlich $\mu_i \colon M \to X_i$ für $i \in \{1,2\}$ und $\mu_A \colon M \to A$, wobei $\alpha_1 \circ \mu_1 = \mu_A = \alpha_2 \circ \mu_2$ gelten muss. Durch diese Bedingung wird das Bein μ_A überflüssig (es ist schon durch eines der μ_i festgelegt) und es verbleibt die Bedingung $\alpha_1 \circ \mu_1 = \alpha_2 \circ \mu_2$. Nennen wir diese zwei Beine im Falle des Faserprodukts $\pi_i \colon X_1 \times_A X_2 \to X_i$, so übersetzt sich die Eigenschaft, terminal zu sein, zu der Charakterisierung aus Beispiel 3.1.5:2: *Für jedes Paar* $(\mu_i \colon M \to X_i)_{i=1,2}$ *mit* $\alpha_1 \circ \mu_1 = \alpha_2 \circ \mu_2$ *gibt es genau einen Morphismus* $f \colon M \to X_1 \times_A X_2$ *mit* $\pi_i \circ f = \mu_i$ *für* $i \in \{1,2\}$.

Abschließend noch eine Sprechweise: Wie wir oben festgestellt haben, sind Kegel über einem Diagramm obiger Form das gleiche wie kommutative Quadrate

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[d, "\mu_1"'] & X_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ X_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Wir nennen ein kommutatives Quadrat *kartesisch*, wenn es ein Faserprodukt ist, d. h. wenn der entsprechende Kegel terminal ist. Nun einige konkrete Beispiele:

1. In der Kategorie der Mengen ist $X_1 \times_A X_2$ wie in Beispiel 3.1.5:2.

2. In der Kategorie der topologischen Räume ist $X_1 \times_A X_2$ gegeben durch den Teil*raum* $\{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2;\ \alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)\} \subseteq X_1 \times X_2$, versehen mit der Teilraumtopologie bzgl. der Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$.

3. In der Kategorie der Gruppen stellen wir fest, dass für Homomorphismen $\alpha_i \colon G_i \to H$ die Teilmenge $G_1 \times_H G_2 := \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2;\ \alpha_1(g_1) = \alpha_2(g_2)\}$ eine Untergruppe von $G_1 \times G_2$ bildet, also selbst wieder eine Gruppe ist. Im speziellen Fall, dass G_2 die triviale Gruppe 1 ist, sehen wir

$$G_1 \times_H 1 = \{g \in G_1,\ \alpha_1(g_1) = 1_H\} \subseteq G_1,$$

was wir auch als *Kern* des Homomorphismus α_1 kennen. Kern zu sein ist also eine universelle Eigenschaft.

Hiermit haben wir in etwa die Hälfte aller universellen Objekte beschrieben. Die andere Hälfte, nämlich die Welt der Quotienten und „Verklebungen“ funktioniert „andersherum“: Dies führt uns zum Begriff des *Ko*limes. Dieser lässt sich sehr leicht formalisieren, indem wir zur dualen Kategorie (vgl. Bemerkung 3.1.3) übergehen:

Bemerkung 3.1.13. Sei $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor. Dann haben wir einen Funktor $F^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}^{\mathrm{op}}$ durch $F^{\mathrm{op}}X := FX$ und $F^{\mathrm{op}}f := Ff$.

Definition 3.1.14. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie und sei $D\colon J \to \mathbf{C}$ ein Diagramm.

1. Ein *Kokegel* unter D ist ein Kegel über D^{op}.
2. Ein *Kolimes* von D ist ein Limes von D^{op}.

Auch Kolimites sind bis auf Isomorphie eindeutig durch das Diagramm festgelegt und wir schreiben $\mathrm{colim}_j(Dj) = \mathrm{colim}(D)$ für den Isomorphietyp ihrer Spitze. Wir nennen $\mathbf{C}$ *J-kovollständig*, wenn alle Diagramme $D\colon J \to \mathbf{C}$ einen Kolimes haben.

Bemerkung 3.1.15. Wir dröseln diese sehr dichten und auf den ersten Blick nichtssagenden Definition im Stile von Konstruktion 3.1.7 etwas auf:

1. Ein *Kokegel* unter D ist eine Familie $(\nu_j\colon Dj \to N)_{j\in\mathrm{ob}(J)}$ von Morphismen in $\mathbf{C}$, bei der $\nu_{j'} \circ Da = \nu_j$ für alle $a\colon j \to j'$ in J gilt. Wieder nennen wir N die *Spitze* und die ν_j die *Beine* des Kokegels und schreiben $(N, \nu_\bullet)$.
2. Ein Morphismus $(N, \nu_\bullet) \to (N', \nu'_\bullet)$ zwischen zwei Kokegeln unter D ist ein Morphismus $g\colon N \to N'$ mit $g \circ \nu_j = \nu'_j$. Wieder erhalten wir eine Kategorie $\mathrm{Kokeg}(D)$ der Kokegel unter D.
3. Ein *Kolimes* von D ist ein initialer Kokegel unter D.

Mit anderen Worten: Ein Kolimes ist ein Kokegel $(Q, \iota_\bullet)$, bei dem es für jeden weiteren Kegel $(N, \nu_\bullet)$ genau einen Morphismus $g\colon (Q, \iota_\bullet) \to (N, \nu_\bullet)$ von Kegeln gibt:

$$\begin{tikzcd}
Dj \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr] \arrow[dd, "\iota_j"'] \arrow[ddrr, "\nu_j"' near start] & & Dj'' \arrow[ddll, "\iota_{j''}"' near start] \arrow[dd, "\nu_{j''}"] \\
& Dj' \arrow[ur] \arrow[dl, "\iota_{j'}"'] \arrow[dr, "\nu_{j'}"] & \\
Q \arrow[rr, dashed, "\exists! g"'] & & N
\end{tikzcd}$$

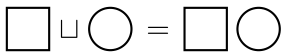
Beispiel 3.1.16. Ein Kokegel unter dem leeren Diagramm ist dasselbe wie ein Objekt in $\mathbf{C}$. Infolgedessen ist ein Kolimes des leeren Diagramms das gleiche wie ein initiales Objekt der Kategorie $\mathbf{C}$.

Das nachfolgende Beispiel dualisiert Beispiel 3.1.11 in dem Sinne, dass Koprodukte in $\mathbf{C}$ das gleiche wie Produkte in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ sind:

Beispiel 3.1.17 (Koprodukte)**.** Sei I eine Indexmenge und sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in $\mathbf{C}$, die wir so wie in Beispiel 3.1.11 als Diagramm der Form $\mathrm{M}I$ auffassen können. Ein Kolimes eines solchen Diagramm heißt *Koprodukt* $\coprod_{i\in I} X_i$, die Beine $\iota_i\colon X_i \to \coprod_{k\in I} X_k$ heißen *Inklusionen*. Hier sind wieder einige Beispiele:

1. In der Kategorie der Mengen ist $\coprod_{i\in I} X_i$ gegeben durch die *disjunkte Vereinigung*, d. h. durch die Menge $\{(i,x);\, i \in I \text{ und } x \in X_i\}$, zusammen mit den Inklusionsabbildungen $\iota_i(x) = (i,x)$.

2. In der Kategorie der topologischen Räume ist $\coprod_{i\in I} X_i$ gegeben durch die disjunkte Vereinigung der zugrundeliegenden Mengen, zusammen mit der *Summentopologie*, d. h. der feinsten Topologie, bzgl. der alle ι_i stetig sind. Anschaulich stellen wir die gegebenen Räume einfach „nebeneinander“:



3. In der Kategorie der Gruppen ist $\coprod_{i\in I} G_i$ komplizierter, nämlich das *freie Produkt*, das ähnlich wie die freie Gruppe aus Beispiel 1.4.3 konstruiert wird.

4. In der Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume ist das Koprodukt $\coprod_{i\in I} V_i$ gegeben durch die *direkte Summe* $\bigoplus_{i\in I} V_i$, d. h. der Teilmenge von $\prod_{i\in I} V_i$ aller $(v_i)_{i\in I}$ mit nur endlich vielen nichttrivialen Koordinaten v_i, zusammen mit den Inklusionen $\iota_i(v) = (v_k)_{k\in I}$ mit $v_k = v$ für $k = i$ und $v_k = 0$ sonst. Wir bemerken, dass im Falle, dass I endlich ist, Produkt und Koprodukt von Vektorräumen isomorph ist, also $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r \cong V_1 \times \cdots \times V_r$ gilt.

5. Sei X eine (prä-)geordnete Menge und sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in $\mathrm{N}X$, also eine Familie von Elementen von X. Dann ist das Koprodukt dieser x_i gegeben durch das *Supremum* der Teilmenge $\{x_i;\, i \in I\} \subseteq X$.

Das nachfolgende Beispiel dualisiert Beispiel 3.1.12, in dem Sinne, dass Kofaserprodukte in $\mathbf{C}$ das gleiche wie Faserprodukte in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ sind. Um dies zu erreichen, müssen wir natürlich unsere Indexkategorie dualisieren:

Beispiel 3.1.18 (Kofaserprodukte)**.** Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie. Ein Diagramm der Form $(\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet)$ in $\mathbf{C}$ ist gegeben durch Morphismen $\alpha_1\colon A \to X_1$ und $\alpha_2\colon A \to X_2$. Ein Kolimes eines solchen Diagramms heißt *Kofaserprodukt* oder *Pushout* $X_1 \sqcup_A X_2$.

Nennen wir die Beine $\iota_i\colon X_i \to X_1 \sqcup_A X_2$, so können wir die universelle Eigenschaft des Kofaserprodukts nochmal aufdröseln: *Für jedes Paar* $(\nu_i : X_i \to N)_{i=1,2}$

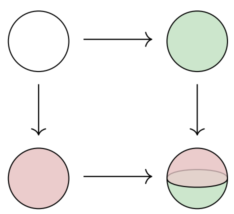
mit $\nu_1 \circ \alpha_1 = \nu_2 \circ \alpha_2$ gibt es genau einen Morphismus $g\colon X_1 \sqcup_A X_2 \to N$ mit $g \circ \iota_i = \nu_i$ für $i \in \{1,2\}$. In Diagrammen sieht das so aus:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & X_2 \arrow[d, "\iota_2"] \arrow[ddr, bend left, "\nu_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "\iota_1"'] \arrow[drr, bend right, "\nu_1"'] & X_1 \sqcup_A X_2 \arrow[dr, dashed, "\exists! g"] & \\
& & N
\end{tikzcd}$$

Analog zu Beispiel 3.1.12 nennen wir kommutatives Quadrat *kokartesisch*, wenn es ein Kofaserprodukt ist (d. h. wenn das entsprechende Quadrat in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ kartesisch im Sinne von Beispiel 3.1.12 ist). Abschließend wieder einige Beispiele:

1. In der Kategorie der Mengen kann $X_1 \sqcup_A X_2$ konstruiert werden, indem aus dem Koprodukt $X_1 \sqcup X_2$ die Relation $(1, \alpha_1(a)) \sim (2, \alpha_2(a))$ herausgeteilt wird. Die Beine sind gegeben durch $\iota_i(x) = [i, x]$.

2. In der Kategorie der topologischen Räume ist $X_1 \sqcup_A X_2$ gegeben durch das Kofaserprodukt der unterliegenden Mengen, versehen mit der Quotiententopologie bzgl. der Abbildung $X_1 \sqcup X_2 \to X_1 \sqcup_A X_2$. Geometrisch bedeutet dies, die beiden Räume X_1 und X_2 zu nehmen und „entlang von A zu verkleben", wie im folgenden Beispiel zwei Scheiben entlang ihres Randes (in beiden Fällen eine Kreislinie), wodurch eine Kugeloberfläche entsteht:



3. In der Kategorie der Gruppen ist das Kofaserprodukt $G_1 *_H G_2$ unter dem Namen *(Gruppen-)Amalgam* bekannt.

Konstruktion 3.1.19. Sei $\phi\colon D \Rightarrow D'$ eine natürliche Transformation von Diagrammen $J \rightrightarrows \mathbf{C}$. Wenn $(P, \pi_\bullet)$ bzw. $(P', \pi'_\bullet)$ Limites von D bzw. D' sind, so haben wir einen zweiten Kegel über D' durch

$$(P, \phi_* \pi_\bullet) = (P \xrightarrow{\pi_j} Dj \xrightarrow{\phi_j} D'j)_{j \in \mathrm{ob}(J)}.$$

Wegen der universellen Eigenschaft von $(P', \pi'_\bullet)$ finden wir also einen eindeutigen Morphismus $(P, \phi_* \pi_\bullet) \to (P', \pi'_\bullet)$ von Kegeln.

Falls $\mathbf{C}$ J-vollständig ist, so können wir für jedes Diagramm D einen Repräsentanten $(\lim(D), \pi_\bullet)$ wählen. Für jede Transformation $\phi\colon D \Rightarrow D'$ von Diagrammen liefert obige Konstruktion einen Morphismus $(\lim(D), \pi_\bullet) \to (\lim(D'), \pi'_\bullet)$ von Kegeln, dessen zugrundeliegenden Morphismus von Spitzen wir $\lim(\phi)$ nennen. Dann gilt $\lim(\mathrm{id}_D) = \mathrm{id}_{\lim(D)}$ und $\lim(\psi \circ \phi) = \lim(\psi) \circ \lim(\phi)$. Insgesamt haben wir also einen Funktor $\lim\colon [J, \mathbf{C}] \to \mathbf{C}$ konstruiert. Jede andere Wahl von Repräsentanten liefert einen zu lim natürlich isomorphen Funktor.

Das Gleiche können wir für colim machen, falls $\mathbf{C}$ J-kovollständig ist, wodurch wir einen Funktor $\operatorname{colim}\colon [J, \mathbf{C}] \to \mathbf{C}$ erhalten.

3.2. Adjunktionen

Wir wollen nun das Phänomen freier Objekte, das wir beispielhaft in Abschnitt 1.4 beschrieben haben, präzise machen. Wie wir dort schon entdeckt haben, sind hieran stets zwei Funktoren beteiligt. Die kategorielle Beschreibung geht wie folgt:

Definition 3.2.1. Seien $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ und $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ zwei Funktoren zwischen lokal kleinen Kategorien. Eine *Adjunktion* zwischen F und G ist ein natürlicher Isomorphismus $\Phi = (\Phi_{X,Y}\colon \mathbf{C}(X, GY) \to \mathbf{D}(FX, Y))_{X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C}), Y \in \mathrm{ob}(\mathbf{D})}$ von Hom-Funktoren

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{D} \arrow[r, bend left, "\mathbf{C}(-,G(-))"] \arrow[r, bend right, "\mathbf{D}(F(-),-)"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Wir nennen dann F *linksadjungiert* zu G, und G *rechtsadjungiert* zu F, und wir notieren ein Paar von zueinander adjungierten Funktoren als $F\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$. Wir weisen auf folgende sprachliche Subtilität hin: Wenn F einen Rechtsadjungierten *hat*, so *ist* F Linksadjungierter in einer Adjunktion.

- Für einen Morphismus $f\colon X \to GY$ schreiben wir $f^\sharp := \Phi_{X,Y}(f)$.
- Für einen Morphismus $g\colon FX \to Y$ schreiben wir $g^\flat := \Phi^{-1}_{X,Y}(g)$.

Proposition 3.2.2. *Die Natürlichkeit von Φ ist äquivalent zu den beiden Identitäten*

$$(f \circ a)^\sharp = f^\sharp \circ Fa \qquad (\text{für } X' \xrightarrow{a} X \xrightarrow{f} GY)$$
$$(b \circ g)^\flat = Gb \circ g^\flat \qquad (\text{für } FX \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{b} Y')$$

Beweis. Falls Φ natürlich ist, so gilt für alle $a\colon X' \to X$ und $f\colon X \to GY$

$$\begin{aligned}(f \circ a)^\sharp &= (\Phi_{X',Y} \circ \mathbf{C}(a, \mathrm{id}_{GY}))(f)\\ &= (\Phi_{X',Y} \circ \mathbf{C}(a, G\mathrm{id}_Y))(f)\\ &= (\mathbf{D}(Fa, \mathrm{id}_Y) \circ \Phi_{X,Y})(f)\\ &= f^\sharp \circ Fa,\end{aligned}$$

und die zweite Identität folgt analog. Nehmen wir umgekehrt an, dass beide Identitäten gelten. Sei nun $(a, b)\colon (X, Y) \to (X', Y')$ ein Morphismus in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{D}$, also $a\colon X' \to X$ und $b\colon Y \to Y'$. Dann gilt für alle $f\colon X \to GY$ die Identität

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}(Fa, b) \circ \Phi_{X,Y})(f) &= b \circ f^\sharp \circ Fa\\ &= b \circ (f \circ a)^\sharp\\ &= (b \circ (f \circ a)^\sharp)^{\flat\sharp}\\ &= (Gb \circ f \circ a)^\sharp\\ &= (\Phi_{X',Y'} \circ \mathbf{C}(a, Gb))(f).\end{aligned}$$ □

Beispiel 3.2.3. Alle Beispiele aus Abschnitt 1.4 beschreiben Adjunktionen zwischen zwei Funktoren. Wir bemerken, dass fast alle Vergissfunktoren rechtsadjungiert zu einer interessanten Konstruktion sind. Der Vergissfunktor von topologischen Räumen zu Mengen taucht in zwei verschiedenen Adjunktionen auf, einmal als Rechts- (Beispiel 1.4.5) und einmal als Linksadjungierter (Beispiel 1.4.6).

Beispiel 3.2.4. Sei J eine Indexkategorie und $\mathbf{C}$ eine lokal kleine[1] Kategorie. Dann haben wir einen Funktor $\Delta\colon \mathbf{C} \to [J, \mathbf{C}]$, der jedem Objekt X das *konstante Diagramm* ΔX mit $(\Delta X)(j) := X$ und $(\Delta X)(a) := \mathrm{id}_X$ zuordnet, und jedem Morphismus $f\colon X \to Y$ die „konstante" Transformation Δf mit $(\Delta f)_j := f$ zuordnet.

1. Ein Rechtsadjungierter von Δ ist das gleiche wie eine Wahl von Limites für jedes Diagramm D wie in Konstruktion 3.1.19. Insbesondere hat Δ genau dann einen Rechtsadjungierten, wenn $\mathbf{C}$ J-vollständig ist.

2. Ein Linksadjungierter von Δ ist das gleiche wie eine Wahl von Kolimites für jedes Diagramm D wie in Konstruktion 3.1.19. Insbesondere hat Δ genau dann einen Linksadjungierten, wenn $\mathbf{C}$ J-kovollständig ist.

Anders ausgedrückt: Limites und Kolimites sind Spezialfälle von Adjunktionen. Ich überlasse Euch die Überprüfung (einer) dieser Aussagen als Aufgabe F.3.

[1] Da J als Indexkategorie klein ist und $\mathbf{C}$ als lokal klein angenommen wurde, ist auch die Funktorkategorie $[J, \mathbf{C}]$ lokal klein, sodass unsere Definition von Adjunktionen hier Sinn hat.

Konstruktion 3.2.5. Seien $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ und $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ zwei Funktoren.

1. Sei Φ eine Adjunktion zwischen F und G. Dann haben wir zwei natürliche Transformationen $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow GF$ und $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$, die *Einheit* und *Koeinheit*. Sie sind gegeben durch $\eta_X := \mathrm{id}_{FX}^\flat\colon X \to GFX$ und $\varepsilon_Y := \mathrm{id}_{GY}^\sharp\colon FGY \to Y$. Zusätzlich gelten die *Dreiecksidentitäten*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{FX} \circ F\eta_X &= \mathrm{id}_{FX}, \\ G\varepsilon_Y \circ \eta_{GY} &= \mathrm{id}_{GY}. \end{aligned}$$

2. Seien umgekehrt $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow GF$ und $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$ natürliche Transformationen, die die Dreiecksidentitäten erfüllen. Dann erhalten wir eine Adjunktion zwischen F und G durch

$$\begin{aligned} f^\sharp &:= \varepsilon_Y \circ Ff, && (f\colon X \to GY) \\ g^\flat &:= Gg \circ \eta_X. && (g\colon FX \to Y) \end{aligned}$$

3. Die Konstruktionen aus Punkten 1 und 2 sind zueinander invers.

Beweis. Wir müssen einige Aussagen geradeheraus nachrechnen:

1. Wir zeigen zunächst, dass η natürlich ist: Sei hierfür $f\colon X \to X'$ ein Morphismus in $\mathbf{C}$. Dann gilt die Identität

$$\begin{aligned} GFf \circ \eta_X &= GFf \circ \mathrm{id}_{FX}^\flat \\ &= (Ff \circ \mathrm{id}_{FX})^\flat \\ &= (\eta_{X'}^\sharp \circ Ff)^\flat \\ &= (\eta_{X'} \circ f)^{\sharp\flat} \\ &= \eta_{X'} \circ f. \end{aligned}$$

Der Beweis für ε sieht ähnlich aus. Wir zeigen noch eine der Dreiecksidentitäten, zum Beispiel die erste: Sei $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$, so gilt

$$\varepsilon_{FX} \circ F\eta_X = \mathrm{id}_{GFX}^\sharp \circ F(\mathrm{id}_{FX}^\flat) = (\mathrm{id}_{GFX} \circ \mathrm{id}_{FX}^\flat)^\sharp = \mathrm{id}_{FX}^{\flat\sharp} = \mathrm{id}_{FX}.$$

2. Wir müssen zeigen, dass die Konstruktionen aus 2 die Identitäten aus Proposition 3.2.2 erfüllen. Wir zeigen hier zur Abwechselung die zweite: Seien also $g\colon FX \to Y$ und $b\colon Y \to Y'$ Morphismen in $\mathbf{D}$. Dann gilt

$$(b \circ g)^\flat = G(b \circ g) \circ \eta_X = Gb \circ (Gg \circ \eta_X) = Gb \circ g^\flat.$$

3. Starten wir bei den Transformationen η und ε, so sehen wir

$$\mathrm{id}_{FX}^{\flat} = G\mathrm{id}_{FX} \circ \eta_X = \mathrm{id}_{GFX} \circ \eta_X = \eta_X,$$

und ähnlicherweise $\mathrm{id}_{GY}^{\sharp} = \varepsilon_Y$. Starten wir umgekehrt bei der Adjunktion, so sehen wir $\varepsilon_Y \circ Ff = \mathrm{id}_{GY}^{\sharp} \circ Ff = (\mathrm{id}_{GY} \circ f)^{\sharp} = f^{\sharp}$ für alle $f\colon X \to GY$. $\square$

Bemerkung 3.2.6. Der Name „Dreiecksidentität“ erklärt sich durch folgende Diagramme, deren Kommutativität den beiden Dreiecksidentitäten entspricht:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon_F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\eta_G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Beispiel 3.2.7. Wir kennen schon viele Einheiten und Koeinheiten:

1. Sei U der Vergissfunktor von $\mathbb{K}$-Vektorräumen nach Mengen, mit Linksadjungiertem $\mathbb{K}\langle - \rangle$ wie in Beispiel 1.4.1. Für jede Menge X ist $\eta_X\colon X \to U\mathbb{K}\langle X \rangle$ die Inklusion der Basis X in den freien Vektorraum $\mathbb{K}\langle X \rangle$, die wir schon in Beispiel 2.3.3:1 kennengelernt haben. Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist die Koeinheit $\varepsilon_V\colon \mathbb{K}\langle UV \rangle \to V$ gegeben durch $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i \mapsto \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i$, wobei die Summe auf der linken Seite *formal* ist und die Summe auf der rechten Seite die $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur auf V nutzt.

2. Sei U der Vergissfunktor von abelschen Gruppen nach Gruppen, mit Linksadjungiertem die Abelisierung $(-)^{\mathrm{ab}}$ wie in Beispiel 1.4.4. Für jede Gruppe G ist $\eta_X\colon G \to U(G^{\mathrm{ab}})$ geben durch die Quotientenabbildung $g \mapsto [g]$, und für jede abelsche Gruppe A ist die Koeinheit $\varepsilon_A\colon (UA)^{\mathrm{ab}} \to A$ die Identität.

3. Sei U der Vergissfunktor von topologischen Räumen nach Mengen, mit Linksadjungiertem $(-)_{\mathrm{disk}}$ aus Beispiel 1.4.5. Für jede Menge X ist $\eta_X\colon X \to UX_{\mathrm{disk}}$ die Identität auf X, und für jeden topologischen Raum Y ist $\varepsilon_Y\colon (UY)_{\mathrm{disk}} \to Y$ auf *Mengen*ebene die Identität, die stetig ist, weil der Quellraum die diskrete Topologie trägt. Allerdings ist ε_Y im Allgemeinen kein Homöomorphismus.

4. Sei U der Vergissfunktor von topologischen Räumen nach Mengen, mit Rechtsadjungiertem $(-)_{\mathrm{triv}}$ aus Beispiel 1.4.6. Für jeden topologischen Raum Y ist $\eta_Y\colon Y \to (UX)_{\mathrm{triv}}$ auf *Mengen*ebene die Identität auf Y, die stetig ist, weil der Zielraum die triviale Topologie trägt. Allerdings ist η_Y im Allgemeinen kein Homöomorphismus. Für jede Menge X ist $\varepsilon_X\colon UX_{\mathrm{triv}} \to X$ die Identität.

Proposition 3.2.8. *Seien $F\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ und $F'\colon \mathbf{D} \rightleftarrows \mathbf{E} : G'$ zwei Paare von adjungierten Funktoren. Dann sind auch die Verkettungen $F'F\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{E} : GG'$ adjungiert.*

Beweis. Sei Φ die Adjunktion für (F, G) und Φ' die Adjunktion für (F', G'). Dann ist $\Psi := \Phi'_{F,\mathrm{id}_\mathbf{E}} \circ \Phi_{\mathrm{id}_\mathbf{C},G'}$ ein natürlicher Isomorphismus $\mathbf{C}(-, GG'(-)) \Rightarrow \mathbf{E}(F'F(-), -)$ wie gewünscht (hier verwenden wir die Notation aus Konstruktion 2.3.7). Etwas ausführlicher: Für $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ und $Z \in \mathrm{ob}(\mathbf{E})$ ist $\Psi_{X,Z}$ gegeben durch

$$\Psi_{X,Z}\colon \mathbf{C}(X, GG'Z) \xrightarrow{\Phi_{X,G'Z}} \mathbf{D}(FX, G'Z) \xrightarrow{\Phi'_{FX,Z}} \mathbf{E}(F'FX, Z)$$ □

Proposition 3.2.9. *Sei $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ ein Funktor und seien $F, F'\colon \mathbf{C} \rightrightarrows \mathbf{D}$ beide linksadjungiert zu G. Dann sind F und F' natürlich isomorph. (Dasselbe gilt für Rechtsadjungierte.)*

Beweis. Das lasse ich Euch wieder als Übungsaufgabe F.2. □

Beispiel 3.2.10. Ähnlich wie für $\mathbb{K}$-Vektorräume hat der Vergissfunktor U von abelschen Gruppen nach Mengen einen Linksadjungierten: Für jede Menge X definieren wir die abelsche Gruppe

$$\mathbb{Z}\langle X\rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot x_i;\ \lambda_i \in \mathbb{Z}, x_i \in X \right\},$$

zusammen mit der naheliegenden Addition. (Die gemeinsame Verallgemeinerung beider Konstruktionen funktioniert für Moduln über einem beliebigen Ring, und abelsche Gruppen sind dasselbe wie Moduln über dem Ring $\mathbb{Z}$.)

Nun können wir den Vergissfunktor U aber in zwei Schritte zerlegen, nämlich U_1 von abelschen Gruppen nach Gruppen und U_2 von Gruppen nach Mengen. Von beiden kennen wir schon Linksadjungierte, nämlich die Abelisierung $(-)^{\mathrm{ab}}$ und die freie Gruppe F. In Diagrammen:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbf{Grp} \arrow[l, shift left, "U_2"] \arrow[r, shift left, "(-)^{\mathrm{ab}}"] & \mathbf{Ab}. \arrow[l, shift left, "U_1"] \end{tikzcd}$$

Nun sagt uns Proposition 3.2.8, dass der Funktor $X \mapsto (FX)^{\mathrm{ab}}$ von Mengen nach abelsche Gruppen ein Linksadjungierter zu $U_2 \circ U_1 = U$ ist. Jetzt wiederum können wir Proposition 3.2.9 ins Felde führen, um zu schließen, dass dieser Funktor natürlich isomorph zur obigen Konstruktion $\mathbb{Z}\langle - \rangle$ ist. Wir haben also bewiesen: *Für jede Menge X ist die Abelisierung von FX isomorph zu $\mathbb{Z}\langle X\rangle$.* Hier ein Beispiel: Die Abelisierung der freien Gruppe mit zwei Erzeugern $F(\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}^2$.

3.3. Limites unter Funktoren

Konstruktion 3.3.1. Sei $D\colon J \to \mathbf{C}$ ein Diagramm und sei $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor. Dann ist $FD\colon J \to \mathbf{D}$ auch ein Diagramm. Ferner gilt:

1. Wenn $(M, \mu_\bullet)$ ein Kegel über D ist, so ist $(FM, F\mu_\bullet)$ ein Kegel über FD.
2. Wenn $(N, \nu_\bullet)$ ein Kokegel unter D ist, so ist $(FN, F\nu_\bullet)$ ein Kokegel unter FD.

Definition 3.3.2. Sei J eine Indexkategorie und $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ein Funktor. Wir sagen, dass F der Form J *erhält*, wenn für alle $D\colon J \to \mathbf{C}$ folgendes gilt: *Ist $(P, \pi_\bullet)$ ein Limes für D, so ist der Kegel $(FP, F\pi_\bullet)$ ein Limes für FD.* Ganz analog für Kolimites.

Beispiel 3.3.3. Im einfachsten Fall, nämlich der, bei dem die Indexkategorie leer ist, frage wir uns also, ob ein gegebener Funktor initiale und terminale Objekte erhält:

1. Diverse Vergissfunktoren erhalten das terminale Objekt (z. B. ist die zugrundeliegende Menge der trivialen Gruppe einpunktig und daher terminal). Manche erhalten allerdings keine initialen Objekte: So ist etwa die triviale Gruppe auch initial in **Grp**, aber ihre zugrundeliegende Menge nicht.

2. Für eine monotone Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen (prä-)geordneten Mengen erhält $\mathrm{N}f$ genau dann initiale Objekte, wenn das Minimum von X (falls vorhanden) unter f auf das Minimum von Y (falls vorhanden) geschickt wird.

Beispiel 3.3.4. Viele Vergissfunktoren erhalten Produkte, aber keine Koprodukte:

1. Sei U der Vergissfunktor von $\mathbb{K}$-Vektorräumen nach Mengen und seien V_1 und V_2 zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann ist $U(V_1 \times V_2)$, zusammen mit den beiden Projektionen, genau das Produkt $UV_1 \times UV_2$ der zugrundeliegenden Mengen d. h. U erhält Produkte (auch unendliche, mit dem gleichen Argument). Ihr Koprodukt ist allerdings $V_1 \oplus V_2$, dessen zugrundeliegender Kokegel in Mengen im Allgemeinen nicht das Koprodukt aus UV_1 und UV_2 ist, zum Beispiel haben $0 \oplus 0$ und $0 \sqcup 0$ unterschiedlich viele Elemente.

2. Sei U der Vergissfunktor von abelschen Gruppen nach Gruppen. Dieser erhält Produkte, was man so ähnlich wie im vorherigen Aufzählungspunkt sieht. Allerdings erhält auch er keine Koprodukte: Wie bei Vektorräumen ist das Koprodukt zweier abelscher Gruppen A_1 und A_2 gegeben durch $A_1 \oplus A_2 = A_1 \times A_2$, während das Koprodukt der zugrundeliegenden Gruppen das in Beispiel 3.1.17:3 erwähnte freie Produkt $UA_1 * UA_2$ ist. Dieses ist im Allgemeinen noch nicht einmal abelsch (z. B. ist $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht abelsch).

3. Der Vergissfunktor von topologischen Räumen erhält sowohl Produkte als auch Koprodukte, was ersichtlich wird, wenn man sich die beiden Konstruktionen in Beispiel 3.1.11:2 und Beispiel 3.1.17:2 noch einmal in Erinnerung ruft. Dass gerade dies der Vergissfunktor ist, der beide Adjungierte hat, ist kein Zufall, wie wir bald sehen werden.

Ein weiteres wichtiges Beispiel limeserhaltender Funktoren sind Hom-Funktoren:

Proposition 3.3.5. *Sei* $\mathbf{C}$ *lokal klein und sei* A *ein Objekt in* A*. Dann erhalten die beiden Hom-Funktoren* $\mathbf{C}(A, -)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ *und* $\mathbf{C}(-, A)\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ *alle Limites.*

Bevor wir Proposition 3.3.5 beweisen, erläutern wir die Dualität in ihrer Aussage: Erstens sind die beiden Aussagen über die einzelnen Funktoren äquivalent, denn der Funktor $\mathbf{C}(-, A)$ stimmt mit $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}(A, -)$ überein. Und zweitens bemerken wir, dass ein Limes über einem Diagram $D\colon J \to \mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ dasselbe ist wie ein Kolimes über $D^{\mathrm{op}}\colon J^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}$. Daher erhält $\mathbf{C}(-, A)$ genau dann Limites, wenn $\mathbf{C}(\mathrm{colim}_j(Dj), A)$ und $\lim_j(\mathbf{C}(Dj, A))$ übereinstimmen.

Beweis von Proposition 3.3.5. Wie festgestellt, müssen wir nur zeigen, dass $\mathbf{C}(A, -)$ Limites erhält. Sei also $D\colon J \to \mathbf{C}$ ein Diagramm in $\mathbf{C}$ und $(P, \pi_\bullet)$ ein Limes von D. Wir zeigen, dass der Kegel $(\mathbf{C}(A, P), \mathbf{C}(A, \pi_\bullet))$ terminal ist. Sei also $(M, \mu_\bullet)$ ein weiterer Kegel über $\mathbf{C}(A, D)$. Wir konstruieren eine Abbildung $f\colon M \to \mathbf{C}(A, P)$ wie folgt: Sei $m \in M$; dann ist $\mu_j(m)$ für jedes j ein Morphismus $A \to Dj$ und es gilt $Da \circ \mu_j(m) = \mu_{j'}(m)$ für jedes $a\colon j \to j'$. Dies zeigt, dass $(A, \mu_\bullet(m))$ ein Kegel über D ist, sodass wir einen eindeutigen Morphismus $f(m)\colon (A, \mu_\bullet(m)) \to (P, \pi_\bullet)$ von Kegeln finden. Dann gilt für jedes j und jedes m

$$(\mathbf{C}(A, \pi_j) \circ f)(m) = \pi_j \circ f(m) = \mu_j(m),$$

weswegen f selbst ein Morphismus $(M, \mu_\bullet) \to (\mathbf{C}(A, P), \mathbf{C}(A, \pi_\bullet))$ von Kegeln ist. Seien nun $f, f'\colon (M, \mu_\bullet) \rightrightarrows (\mathbf{C}(A, P), \mathbf{C}(A, \pi_\bullet))$ zwei Morphismen von Kegeln, so sind für alle $m \in M$ sowohl $f(m)\colon A \to P$ als auch $f'(m)\colon A \to P$ Morphismen von Kegeln, und weil P terminal ist, folgt $f(m) = f'(m)$, also $f = f'$. □

Abschließend zeigen wir ein zentrales Resultat über adjungierte Funktoren:

Theorem 3.3.6. *Seien* $F\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ *adjungierte Funktoren (also* F *ist linksadjungiert und* G *ist rechtsadjungiert). Dann erhält* F *alle Kolimites und* G *alle Limites.*

Beweis. Aus Dualitätsgründen genügt es, zu zeigen, dass F Kolimites erhält. Sei also $D\colon J \to \mathbf{C}$ ein Diagramm und $(Q, \iota_\bullet)$ ein Kolimes von D. Sei ferner $(N, \nu_\bullet)$ ein Kokegel unter FD. Dann müssen wir zeigen, dass es genau einen Morphismus

$(FQ, F\iota_\bullet) \to (N, \nu_\bullet)$ gibt. Hierzu bemerken wir, dass jedes $\nu_j \colon FDj \to N$ einem Morphismus $\nu_j^\flat \colon Dj \to GN$ entspricht. Wir prüfen, dass $(GN, \nu_\bullet^\flat)$ ein Kokegel unter D ist: Sei hierfür $a \colon j \to j'$ ein Morphismus. Dann gilt mit Proposition 3.2.2

$$\nu_{j'}^\flat \circ Da = (\nu_{j'}^\flat \circ Da)^{\sharp\flat} = (\nu_{j'} \circ FDa)^\flat = \nu_j^\flat$$

Folglich gibt es genau einen Morphismus $g \colon (Q, \iota_\bullet) \to (GN, \nu_\bullet^\flat)$ von Kokegeln. Dann ist $g^\sharp \colon FQ \to N$ ein Morphismus von Kokegeln $(FQ, F\iota_\bullet) \to (N, \nu_\bullet)$, denn für alle j gilt $g^\sharp \circ F\iota_j = (g \circ \iota_j)^\sharp = \nu_j^{\flat\sharp} = \nu_j$. Dies zeigt die *Existenz*; die *Eindeutigkeit* folgt im Wesentlichen mit dem gleichen Beweis, nur andersherum aufgeschrieben. □

Beispiel 3.3.7. Hier sind einige sehr unterschiedliche Beispiele:

1. Der Vergissfunktor von topologischen Räumen zu Mengen ist sowohl rechts- als auch linksadjungiert, weswegen er alle Limites und Kolimites erhält.

2. Der Vergissfunktor von $\mathbb{K}$-Vektorräumen nach Mengen hat einen Linksadjungierten, kann aber keinen Rechtsadjungierten besitzen, weil er (wie wir gesehen haben) keine Koprodukte erhält. Sein Linksadjungierter, also $\mathbb{K}\langle - \rangle$, erhält allerdings alle Koprodukte. So gilt zum Beispiel

$$\mathbb{K}\langle X \rangle \oplus \mathbb{K}\langle Y \rangle \cong \mathbb{K}\langle X \sqcup Y \rangle.$$

   Etwas einfacher formuliert sollte diese Erkenntnis stark an die Lineare Algebra erinnern: Ist $\{x_1, \dots, x_r\}$ eine Basis für V und $\{y_1, \dots, y_s\}$ eine Basis für W, so ist $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\}$ eine Basis für $V \oplus W$.

3. Die Abelisierung $(-)^{\mathrm{ab}} \colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ erhält Kolimites, übersetzt also insbesondere freie Produkte in direkte Summen, d. h. es gilt $(G * H)^{\mathrm{ab}} \cong G^{\mathrm{ab}} \oplus H^{\mathrm{ab}}$.

4. In einer vorherigen Übungsaufgabe haben wir uns davon überzeugt, dass der Funktor $\mathrm{N}\mathbb{Z} \to \mathrm{N}\mathbb{R}$, der durch die Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ induziert ist, beide Adjungierte hat, wobei zum Beispiel der Rechtsadjungierte durch *Abrunden* $\lfloor \cdot \rfloor \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ induziert ist. Als Rechtsadjungierter erhält die Abrunden-Funktion Limites, allerdings erhält nicht alle Kolimites: Wir sehen

$$\coprod_{x<1} \lfloor x \rfloor = \sup_{x<1}(\lfloor x \rfloor) = 0 \neq 1 = \left\lfloor \sup_{x<1}(x) \right\rfloor = \left\lfloor \coprod_{x<1} x \right\rfloor.$$

Kapitel 4.

Monoidales

The introduction of the cipher 0 [. . .] was general nonsense too, and mathematics was more or less stagnating for thousands of years because nobody was around to take such childish steps.

ALEXANDER GROTHENDIECK (1928–2014)

In diesem letzten Abschnitt wollen wir noch einige weitere Teilbereiche der Kategorientheorie anschneiden, die eine Reihe von Konzepten aus der Algebra vereinheitlichen, aber auch in anderen Bereichen der Mathematik (wie z. B. der Quantenfeldtheorie) auftauchen.

4.1. Monoidale Kategorien

Definition 4.1.1. Eine *monoidale Kategorie* ist eine Kategorie $\mathbf{V}$, zusammen mit:

1. einem Funktor $(-) \odot (-) \colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, genannt *monoidales Produkt*,
2. einem Objekt $\mathbb{1} \in \mathrm{ob}(\mathbf{V})$, genannt *monoidale Eins*,
3. einem natürlichen Isomorphismus $(\alpha_{A,B,C} \colon (A \odot B) \odot C \to A \odot (B \odot C))_{A,B,C}$,
4. natürlichen Isomorphismen $(\ell_A \colon \mathbb{1} \odot A \to A)_A$ und $(\rho_A \colon A \odot \mathbb{1} \to A)_A$,

die das *Dreiecks-* und *Fünfecksaxiom* erfüllen:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_A \odot \ell_B) \circ \alpha_{A,\mathbb{1},B} &= \rho_A \odot \mathrm{id}_B,\\ \alpha_{A,B,C\odot D} \circ \alpha_{A\odot B,C,D} &= (\mathrm{id}_A \odot \alpha_{B,C,D}) \circ \alpha_{A,B\odot C,D} \circ (\alpha_{A,B,C} \odot \mathrm{id}_D),\end{aligned}$$

Wir notieren die monoidale Kategorie häufig als $(\mathbf{V}, \odot, \mathbb{1})$ und unterschlagen in der Notation die Transformationen α, ℓ und ρ.

Bemerkung 4.1.2. Das Dreiecks- und das Fünfecksaxiom sind benannt nach der Form der Diagramme, in denen man sie ausdrücken kann:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
(A \odot \mathbb{1}) \odot B \arrow[rr, "\alpha_{A,\mathbb{1},B}"] \arrow[dr, "\rho_A \odot \mathrm{id}_B"'] & & A \odot (\mathbb{1} \odot B) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A \odot \ell_B"] \\
& A \odot B &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
((A \odot B) \odot C) \odot D \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C} \odot \mathrm{id}_D"] \arrow[d, "\alpha_{A \odot B,C,D}"'] & & (A \odot (B \odot C)) \odot D \arrow[d, "\alpha_{A,B \odot C,D}"] \\
(A \odot B) \odot (C \odot D) \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C \odot D}"'] & & A \odot ((B \odot C) \odot D) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A \odot \alpha_{B,C,D}"] \\
& A \odot (B \odot (C \odot D)) &
\end{tikzcd}$$

Beispiel 4.1.3. Die Mathematik ist voll von monoidalen Kategorien:

1. Falls $\mathbf{C}$ binäre Produkte und ein terminales Objekt $*$ besitzt, so kann $\mathbf{C}$ durch $X \odot Y := X \times Y$ und $\mathbb{1} := *$ zu einer monoidalen Kategorie gemacht werden, vgl. Aufgabe E.3. Hierbei benutzen wir, dass das Produkt funktoriell ist, d. h. für $f\colon X \to X'$ und $g\colon Y \to Y'$ erhalten wir einen Morphismus $f \times g\colon X \times Y \to X' \times Y'$ wie in Konstruktion 3.1.19. Die Transformationen α, ℓ und ρ können mithilfe der universellen Eigenschaft des Produktes konstruiert werden. Man nennt $(\times, *)$ auch die *kartesische monoidale Struktur* auf $\mathbf{C}$.

2. Dual zu Punkt 1: Falls $\mathbf{C}$ binäre Koprodukte und ein initiales Objekt $\varnothing$ besitzt, so definiert auch $X \odot Y := X \sqcup Y$ und $\mathbb{1} := \varnothing$ eine monoidale Struktur auf $\mathbf{C}$, die wir die *kokartesische monoidale Struktur* auf $\mathbf{C}$ nennen.

3. In der Kategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ der $\mathbb{K}$-Vektorräume ist durch das übliche Tensorprodukt $V \odot W := V \otimes W$ und $\mathbb{1} := \mathbb{K}$ eine monoidale Struktur gegeben. Auch hier benutzen wir, dass zwei lineare Abbildungen $\phi\colon V \to V'$ und $\psi\colon W \to W'$ eine lineare Abbildung $\phi \otimes \psi\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$ definieren.

4. Für eine Kategorie $\mathbf{C}$ können wir die Funktorkategorie $[\mathbf{C}, \mathbf{C}]$, genannt die *Endofunktorkategorie von* $\mathbf{C}$ betrachten. Sie hat eine monoidale Struktur durch die Verkettung $G \odot F := GF = G \circ F$. Hierfür bemerken wir wieder, dass sich die Verkettung von Funktoren auch auf natürliche Transformationen fortsetzen lässt: Sind $\theta\colon F \Rightarrow F'$ und $\kappa\colon G \Rightarrow G'$ zwei natürliche Transformationen, so erhalten wir mit Konstruktion 2.3.7 eine Transformation
$$\kappa \circ \theta := \kappa_{F'} \circ G\theta\colon GF \Rightarrow GF' \Rightarrow G'F'.$$
Wegen der Natürlichkeit von θ und κ gilt $\kappa_{F'} \circ G\theta = G'\theta \circ \kappa_F$. Abschließend bemerken wir, dass hier die Transformationen α, ℓ und ρ die Identität sind.

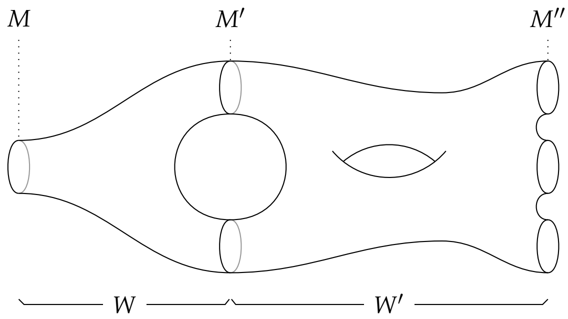


Abbildung 4.1. Eine Verkettung $W' \circ W$ für $W\colon M \to M'$ und $W'\colon M' \to M''$ in $\mathbf{Bord}_2$.

Beispiel 4.1.4. Ein etwas exotischeres Beispiel einer monoidalen Kategorie ist die *d-dimensionale Bordismuskategorie* $\mathbf{Bord}_d$, die wir hier nur grob andeuten:

1. Objekte von $\mathbf{Bord}_d$ sind kompakte $(d-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten.
2. Ein Morphismus $W\colon M \to M'$ zwischen kompakten $(d-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten M und M' ist eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit W *mit Rand* ∂W, zusammen mit einem Homöomorphismus $\phi\colon M \sqcup M' \to \partial W$.
3. Für eine kompakte $(d-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit M ist die Identität id_M gegeben durch $M \times [0,1]$ und der Identifikation $\phi\colon M \sqcup M \to M \times \{0,1\}$.
4. Für $W\colon M \to M'$ und $W'\colon M' \to M''$ ist die Verkettung $W' \circ W$ gegeben durch die Verklebung $W \sqcup_{M'} W'$, siehe Abbildung 4.1.

Dann haben wir eine monoidale Struktur auf $\mathbf{Bord}_d$ durch die disjunkte Vereinigung von Mannigfaltigkeiten $M \odot M' := M \sqcup M'$ sowie $W \odot W' := W \sqcup W'$. Die monoidale Eins ist gegeben durch die leere Mannigfaltigkeit $\varnothing$.

Definition 4.1.5. Sei $(\mathbf{V}, \odot, \mathbb{1})$ eine monoidale Kategorie. Ein *Monoid* in $\mathbf{V}$ ist ein Objekt A, zusammen mit einer *Multiplikation* $\mu\colon A \odot A \to A$ und einer *Einheit* $\eta\colon \mathbb{1} \to A$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Assoziativität. $\mu \circ (\mathrm{id}_A \odot \mu) \circ \alpha_{A,A,A} = \mu \circ (\mu \odot \mathrm{id}_A)$.
2. Unitalität. $\mu \circ (\eta \odot \mathrm{id}_A) = \ell_A$ und $\mu \circ (\mathrm{id}_A \odot \eta) = \rho_A$

Vernachlässigt man α, ℓ und ρ, so kann man diese Eigenschaften wie folgt zeichnen:

$$\begin{tikzcd} A \odot A \odot A \arrow[r, "\mathrm{id}_A \odot \mu"] \arrow[d, "\mu \odot \mathrm{id}_A"'] & A \odot A \arrow[d, "\mu"] \\ A \odot A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \odot A \cong A \odot \mathbb{1} \arrow[r, "\mathrm{id}_A \odot \eta"] \arrow[d, "\eta \odot \mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, equal] & A \odot A \arrow[d, "\mu"] \\ A \odot A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Ein Homomorphismus $(A, \mu, \eta) \to (A', \mu', \eta')$ von Monoiden ist ein Morphismus $\phi\colon A \to A'$ mit $\phi \circ \eta = \eta'$ und $\phi \circ \mu = \mu' \circ (\phi \odot \phi)$. Auf diese Weise erhalten wir eine Kategorie $\mathbf{Mon}(\mathbf{V}, \odot, \mathbb{1})$ von Monoiden in $\mathbf{V}$.

Folgende Proposition verallgemeinert die Eindeutigkeit neutraler Elemente:

Proposition 4.1.6. *Sind (A, μ, η) und (A, μ, η') Monoide, so gilt $\eta = \eta'$.*

Beweisskizze. Im ersten (nicht-trivialen, aber erwartbaren) Schritt überzeugt man sich, dass $\ell_{\mathbb{1}} = \rho_{\mathbb{1}}$ gilt. Nun können wir den Beweis aus Proposition 1.1.2 imitieren:

$$\eta' \circ \ell_{\mathbb{1}} = \ell_A \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{1}} \odot \eta') = \mu \circ (\eta \odot \eta') = \rho_A \circ (\eta \odot \mathrm{id}_{\mathbb{1}}) = \eta \circ \rho_{\mathbb{1}} = \eta \circ \ell_{\mathbb{1}}.$$

Weil nun $\ell_{\mathbb{1}}$ ein Isomorphismus ist, folgt $\eta' = \eta$ wie gewünscht. □

Beispiel 4.1.7. Der Begriff des Monoids verallgemeinert viele bekannte Konzepte:

1. Im Falle der monoidalen Kategorie $(\mathbf{Set}, \times, *)$ sind Monoide dasselbe wie klassische Gruppen $(A, *, 1_A)$, nur ohne die Forderung, dass alle Elemente invertierbar sein müssen. Dieser Spezialfall wird auch klassischerweise als *Monoid* bezeichnet. Homomorphismen von Monoiden sind Abbildungen $\phi\colon A \to A'$ mit $\phi(a * a') = \phi(a) * \phi(a')$ und $\phi(1_A) = 1_{A'}$.

2. Im Falle der monoidalen Kategorie $(\mathbf{Top}, \times, *)$ sind Monoide auch als *topologische Monoide* bekannt.

3. Im Falle der monoidalen Kategorie $(\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}, \otimes, \mathbb{K})$ sind Monoide dasselbe wie $\mathbb{K}$-Algebren, und Homomorphismen von Monoiden in $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ sind dasselbe wie Algebrenhomomorphismen.

4. Auch für abelsche Gruppen (und allgemeiner für Moduln über einem Ring) gibt es ein Tensorprodukt, und Monoide in $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$ sind dasselbe wie Ringe (mit Eins).

5. Sei $(\mathbf{C}, \sqcup, \varnothing)$ mit kokartesischer monoidaler Struktur wie in Beispiel 4.1.3:2. Dann gibt auf jedem Objekt $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ eine eindeutige Monoidstruktur, nämlich die *Kodiagonale* $\nabla_A\colon A \sqcup A \to A$, die festgelegt ist durch $\nabla_A \circ \iota_i = \mathrm{id}_A$ für $i \in \{1, 2\}$, und den initialen Morphismus $\eta\colon \varnothing \to A$.

Wir können dem klassischen Begriff von Gruppen noch etwas näherkommen, indem wir auch die Existenz von Inversen durch einen Inversionsmorphismus ausdrücken. Dies geht allerdings nur für kartesische monoidale Strukturen.

Definition 4.1.8. Sei $(\mathbf{C}, \times, *)$ eine Kategorie mit kartesischer monoidaler Struktur wie in Beispiel 4.1.3:1, und für jedes Objekt A sei $\varepsilon_A \colon A \to *$ der eindeutige Morphismus. Eine *Gruppe* in $\mathbf{C}$ ist ein Monoid (A, μ, η), zusammen mit einer *Inversion* $\omega \colon A \to A$, die $\mu \circ \langle \omega, \mathrm{id}_A \rangle = \eta \circ \varepsilon_A = \mu \circ \langle \mathrm{id}_A, \omega \rangle$ erfüllt, in Diagrammen:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times A \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \arrow[ur, "{\langle \omega, \mathrm{id}_A \rangle}"] \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[dr, "{\langle \mathrm{id}_A, \omega \rangle}"'] & * \arrow[r, "\eta"] & A \\
 & A \times A \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Hierbei notieren wir durch $\langle f_1, f_2 \rangle \colon A \to A \times A$ den eindeutigen Morphismus, der durch $\pi_i \circ \langle f_1, f_2 \rangle = f_i$ definiert ist. Homomorphismen $(A, \mu, \eta, \omega) \to (A', \mu', \eta', \omega')$ von Gruppen sind Morphismen $\phi \colon (A, \mu, \eta) \to (A', \mu', \eta')$, für die zusätzlich noch $\phi \circ \omega = \omega' \circ \phi$ gilt. Wir erhalten eine Kategorie $\mathbf{Grp}(\mathbf{C}, \times, *)$

Bemerkung 4.1.9. Wie bei Gruppenhomomorphismen vermute ich stark, dass die Bedingung „$\phi \circ \omega = \omega' \circ \phi$“ schon aus den übrigen Eigenschaften folgt, aber ich hatte vor der Akademie keine Zeit gefunden, das sorgfältig nachzurechnen. Das kann ja mal jemand von Euch machen!

Hier noch eine „vertrauensbildende Maßnahme“, die zeigt, dass zweifaches Invertieren wie erwartet nichts tut:

Proposition 4.1.10. *Sei $(\mathbf{C}, \times, *)$ eine Kategorie mit kartesischer monoidaler Struktur. Sei (A, μ, η, ω) eine Gruppe. Dann gilt $\omega^2 = \mathrm{id}_A$.*

Beweis. Wir bemerken, dass $\rho_A \colon A \times * \to A$ gerade die erste Projektion ist, vgl. Aufgabe E.3. Nutzen wir nun Assoziativität und Unitalität, so sehen wir

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \rho_A \circ \langle \omega^2, \varepsilon_A \rangle \\
&= (\mu \circ (\mathrm{id}_A \times \eta)) \circ \langle \omega^2, \varepsilon_A \rangle \\
&= \mu \circ \langle \omega^2, \eta \circ \varepsilon_A \rangle \\
&= \mu \circ (\mathrm{id}_A \times \mu) \circ \langle \omega^2, \omega, \mathrm{id}_A \rangle \\
&= \mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_A) \circ \langle \omega^2, \omega, \mathrm{id}_A \rangle \\
&= \mu \circ \langle \mu \circ \langle \omega, \mathrm{id}_A \rangle \circ \omega, \mathrm{id}_A \rangle \\
&= \mu \circ \langle \eta \circ \varepsilon_A \circ \omega, \mathrm{id}_A \rangle \\
&= \mu \circ \langle \eta \circ \varepsilon_A, \mathrm{id}_A \rangle \\
&= \mathrm{id}_A.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.1.11. In der Geometrie sind drei Kategorien von Gruppen wichtig:

1. Gruppen in $(\mathbf{Set}, \times, *)$ sind Gruppen im üblichen Sinne.
2. Gruppen in $(\mathbf{Top}, \times, *)$ sind bekannt als *topologische Gruppen*.
3. Gruppen in $(\mathbf{Mfd}, \times, *)$ sind bekannt als *Liegruppen*.

Abschließend wollen wir noch definieren, was es heißt, dass ein Monoid auf einem anderen Objekt „operiert". Dies führt uns zu den Begriff eines Moduls:

Definition 4.1.12. Sei (A, μ, η) ein Monoid in einer monoidalen Kategorie $(\mathbf{V}, \odot, \mathbb{1})$. Ein *A-Modul* ist ein Objekt M, zusammen mit einem Morphismus $\lambda\colon A \odot M \to M$, der folgendes erfüllt:

1. ASSOZIATIVITÄT. Es gilt $\lambda \circ (\mu \odot \mathrm{id}_M) = \lambda \circ (\mathrm{id}_A \odot \lambda) \circ \alpha_{A,A,M}$.
2. UNITALIÄT. Es gilt $\lambda \circ (\eta \odot \mathrm{id}_M) = \ell_M$.

Ein Morphismus $(M, \lambda) \to (M', \lambda')$ von A-Moduln ist ein Morphismus $f\colon M \to M'$ mit $f \circ \lambda = \lambda' \circ (\mathrm{id}_A \odot f)$. Wir erhalten eine Kategorie $\mathbf{Mod}_A$.

Beispiel 4.1.13. Wieder sehen wir, dass mehrere Konzepte vereinheitlicht werden:

1. Eine Gruppe G ist insbesondere ein Monoid in $(\mathbf{Set}, \times, *)$. Dann ist ein G-Modul dasselbe wie eine Menge X, auf der die Gruppe G operiert.
2. Eine topologische Gruppe G ist insbesondere ein Monoid in $(\mathbf{Top}, \times, *)$. Dann ist ein G-Modul dasselbe wie ein Raum X, auf dem G stetig operiert.
3. Ein Körper $\mathbb{K}$ ist insbesondere ein Monoid in $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$. Dann ist ein $\mathbb{K}$-Modul dasselbe wie ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

4.2. Monaden

In diesem letzten Abschnitt besprechen wir den Begriff einer Monade, der das Konzept eines Monoids verallgemeinert und eng mit Adjunktionen verwandt ist. Eine Möglichkeit, ihn zu motivieren, ist die folgende: Sei $F\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ ein Paar adjungierter Funktoren, mit Einheit η und Koeinheit ε. Wie viel davon können wir angeben ohne die Kategorie $\mathbf{D}$ zu erwähnen?

Bemerkung 4.2.1. Seien $F\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} :G$ sowie η und ε wie oben. Dann haben wir einen Endofunktor $T := GF\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, d. h. die Einheit ist der Form $\eta\colon \mathrm{id}_\mathbf{C} \Rightarrow T$. Setzen wir außerdem $\mu := G\varepsilon_F\colon TT \Rightarrow T$, so kommutieren folgende Diagramme:

$$\begin{tikzcd} TTT \arrow[r, Rightarrow, "T\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu_T"'] & TT \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\ TT \arrow[r, Rightarrow, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, Rightarrow, "T\eta"] \arrow[d, Rightarrow, "\eta_T"'] \arrow[dr, equal] & TT \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\ TT \arrow[r, Rightarrow, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Beweis. Für jedes $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ gilt

$$\mu_X \circ T\mu_X = G\varepsilon_{FX} \circ GFG\varepsilon_{FX} = G(\varepsilon_{FX} \circ FG\varepsilon_{FX}) = G(\varepsilon_{FX} \circ \varepsilon_{FGFX}) = \mu_X \circ \mu_{TX}.$$

Ferner gilt $\mu_X \circ T\eta_X = G(\varepsilon_{FX} \circ F\eta_X) = G\mathrm{id}_{FX} = \mathrm{id}_{TX}$. □

Definition 4.2.2. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie. Eine *Monade auf* $\mathbf{C}$ ist ein Tripel (T, μ, η), bei dem $T\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ein Endofunktor ist und $\mu\colon TT \Rightarrow T$ sowie $\eta\colon \mathrm{id}_\mathbf{C} \Rightarrow T$ natürliche Transformationen sind, bei der die beiden Diagramme aus (4.2) kommutieren.

Die Diagramme aus (4.2) erinnern uns stark an die beiden Diagramme aus (4.1) und tatsächlich gilt folgende Aussage, für die wir uns nochmal die monoidale Kategorie der Endofunktoren $([\mathbf{C}, \mathbf{C}], \circ, \mathrm{id}_\mathbf{C})$ aus Beispiel 4.1.3:4 in Erinnerung rufen:

Proposition 4.2.3. *Eine Monade auf* $\mathbf{C}$ *ist dasselbe wie ein Monoid in der monoidalen Kategorie der Endofunktoren.*

Beweis. Man schreibe beide Definitionen nochmal aus und stelle fest, dass man exakt das gleiche hingeschrieben hat. □

Beispiel 4.2.4. Wir kennen schon einige Monaden:

1. Jede Adjunktion liefert eine Monade, siehe Bemerkung 4.2.1.

2. Sei $(\mathbf{V}, \odot, \mathbb{1})$ eine monoidale Kategorie und sei (A, μ, η) ein Monoid. Dann haben wir eine Monade $T := A \odot (-)$ mit $\mu_X := (\mu \odot \mathrm{id}_X) \circ \alpha^{-1}_{A,A,X}\colon TTX \to TX$ und $\eta_X := (\eta \odot \mathrm{id}_X) \circ \ell_X^{-1}\colon X \to TX$.

3. Für eine Menge X bezeichne $\mathfrak{P}X := \{S;\, S \subseteq X\}$ ihre *Potenzmenge*. Diese wird zu einem Endofunktor $\mathfrak{P}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ durch $(\mathfrak{P}f)(S) = f(S) \subseteq Y$ für alle $f\colon X \to Y$, der mit der Struktur einer Monade versehen werden kann, und zwar durch die Transformationen $\mu_X\colon \mathfrak{P}\mathfrak{P}X \to \mathfrak{P}X$ und $\eta_X\colon X \to \mathfrak{P}X$ mit

$$\mu_X(\{S_i\}_{i \in I}) = \bigcup_{i \in I} S_i, \qquad \eta_X(x) = \{x\}.$$

Definition 4.2.5. Sei (T, μ, η) eine Monade auf $\mathbf{C}$. Eine T-*Algebra* ist ein Objekt M in $\mathbf{C}$, zusammen mit einem Morphismus $\lambda\colon TM \to M$, für den $\lambda \circ \mu_M = \lambda \circ T\lambda$ und $\lambda \circ \eta_M = \mathrm{id}_M$ gilt. Ein Morphismus $(M, \lambda) \to (M', \lambda')$ von T-Algebren ist ein Morphismus $f\colon M \to M'$ mit $f \circ \lambda = \lambda' \circ Tf$. Auf diese Weise erhalten wir eine Kategorie $\mathbf{Alg}_T$ von T-Algebren.

Beispiel 4.2.6. Sei (A, μ, η) ein Monoid in $(\mathbf{V}, \odot, \mathbb{1})$ und sei T die dazu assoziierte Monade wie in Beispiel 4.2.4:2. Dann sind T-Algebren (und ihre Morphismen) dasselbe wie A-Moduln (Übung!).

Konstruktion 4.2.7. Sei (T, μ, η) eine Monade in $\mathbf{C}$. Dann haben wir einen Vergissfunktor $U^T\colon \mathbf{Alg}_T \to \mathbf{C}$. Dieser hat einen Linksadjungierten $F^T\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Alg}_T$: Sei X ein Objekt in $\mathbf{C}$, dann ist $F^T X := (TX, \mu_X)$ eine T-Algebra. Sei ferner $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathbf{C}$, dann ist $F^T f := Tf\colon TX \to TY$ ein Morphismus von T-Algebren. Sei nun (M, λ) eine T-Algebra und X ein Objekt in $\mathbf{C}$:

- Ist $f\colon X \to U^T(M, \lambda) = M$ ein Morphismus in $\mathbf{C}$, so setzen wir
$$f^\sharp\colon TX \xrightarrow{Tf} TM \xrightarrow{\lambda} M.$$
- Ist $g\colon (TX, \mu_X) = F^T X \to (M, \lambda)$ ein Morphismus in $\mathbf{Alg}_T$, so setzen wir
$$g^\flat\colon X \xrightarrow{\eta_X} TX \xrightarrow{U^T g} M$$

Abschließend bemerken wir, dass die Monade (T, μ, η) wie in Bemerkung 4.2.1 durch die adjungierten Funktoren $F^T\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{Alg}_T : U^T$ induziert ist, d. h. es gilt $T = U^T F^T$, die Einheit der Adjunktion ist gerade η und wenn $\varepsilon\colon F^T U^T \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{Alg}_T}$ die Koeinheit bezeichnet, so gilt $U^T \varepsilon_{F^T} = \mu$.

Beweis. Das lasse ich Euch als Übungsaufgabe G.2. □

Beispiel 4.2.8. Sei G eine Gruppe, also insbesondere ein Monoid in $(\mathbf{Set}, \times, *)$. Dann ist der freie G-Modul über einer Menge X dasselbe wie die Menge $G \times X$, zusammen mit der Wirkung $g \cdot (h, x) := (g * h, x)$. Dies rechtfertigt den Begriff einer „freien Gruppenwirkung“: Die Wirkung von G auf einer Menge M ist genau dann frei, wenn M, als G-Modul, isomorph zu einem freien G-Modul ist.

Bemerkung 4.2.9. Sei $F\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ eine Adjunktion und sei $(GF, \eta, G\varepsilon_F)$ die dazu assoziierte Monade im Sinne von Bemerkung 4.2.1. Wir können uns nun fragen, ob die ursprüngliche Adjunktion mit der neu konstruierten Adjunktion

$F^T\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{Alg}_T : U^T$ übereinstimmt (oder zu ihr in einem adäquaten Sinne isomorph ist). Dies ist nicht automatisch der Fall, aber falls es gilt, so nennen wir die ursprüngliche Adjunktion *monadisch*. Es gibt verschiedene Kriterien, um für eine gegebene Adjunktion Monadizität zu prüfen.